

# „Quantenchaos“ bei Mikrowellen - Finite Elemente Untersuchungen zur Eigenwertstatistik der Helmholtz-Gleichung

K.W. Kark

Institut für Nachrichtentechnik der Fachhochschule Ravensburg-Weingarten, Postfach 1261, D-88241 Weingarten,  
homepage: <http://www.fh-weingarten.de/fbe/stge/nachrichtentechnik/nt-main.htm>, Tel.: 0751-501591,  
Fax: 0751-49240, e-mail: [kark@fbe.fh-weingarten.de](mailto:kark@fbe.fh-weingarten.de)

**Übersicht.** Verlustlose Mikrowellenresonatoren können wegen der mathematischen Äquivalenz von Schrödinger- und Helmholtz-Gleichung als klassisches Analogon zum Studium quantenmechanischer Systeme benutzt werden. Mit Hilfe der Methode der finiten Elemente wurden deshalb für längshomogene Resonatoren mit beliebig geformter Berandung Lösungen von  $(\Delta_t + \Lambda_n)u_n(x, y) = 0$  gesucht. Der durch die Diskretisierung bedingte Fehler in den FEM-Eigenwerten wurde besonders betrachtet. Die auf ihren Mittelwert normierten Abstände der Eigenwerte zu ihrem Vorgänger wurden statistisch ausgewertet. Diese Abstände genügen in regulären Systemen einer Poisson-Verteilung, während rein chaotische Systeme eine Wigner-Verteilung aufweisen. Im Viertelstadion-Billard, einem gemischten System mit teilweise chaotischem Verhalten, wurden 505 H-Resonanzen untersucht. Neben Eigenwellen mit chaotischen Feldbildern findet man reguläre Spektralanteile (bouncing-ball Moden) mit geordneter Struktur. Ihre Anzahl konnte asymptotisch abgeschätzt werden.

**Abstract.** Loss-free microwave resonators can be used to study quantum mechanical systems since Helmholtz and Schrödinger equation are mathematically equivalent. Therefore finite element solutions of  $(\Delta_t + \Lambda_n)u_n(x, y) = 0$  were searched for resonators which are homogeneous in longitudinal direction and have arbitrary cross section. The discretization error of the FEM eigenvalues was studied in detail. The nearest neighbour spacing distribution of the eigenvalues was treated statistically. These spacings match a Poisson distribution in regular systems and a Wigner distribution in purely chaotic systems. For the quarter-stadium billiard, which is a mixed system with partly chaotic behaviour, 505 TE resonances were investigated. Besides eigenmodes with chaotic fields regular bouncing-ball modes with ordered structure can be found. Their quantity was estimated asymptotically.

## 1 Einleitung

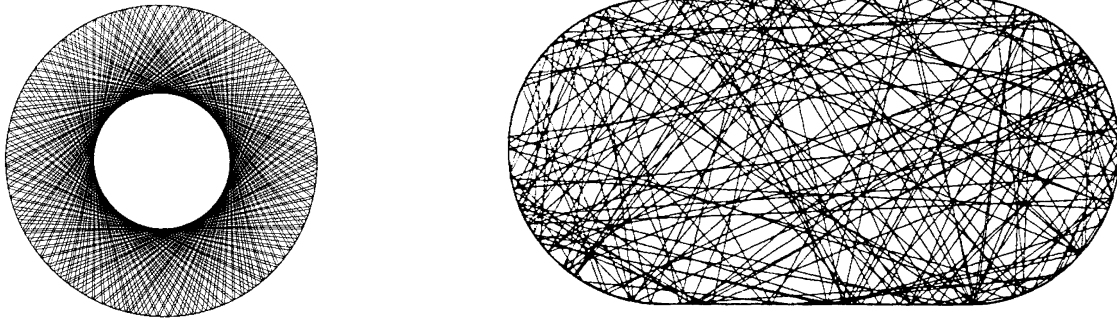
Die mathematische Äquivalenz zwischen zeitunabhängiger Schrödinger-Gleichung und Helmholtz-Gleichung

$$\left[ \Delta + \frac{2m}{\hbar^2} (E_n - V) \right] \Psi_n = 0 \quad \text{und} \quad (\Delta + k_n^2) u_n = 0 \quad (1)$$

ermöglicht einen klassischen Zugang zum Studium quantenmechanischer Systeme. Beispielsweise entspricht ein Teilchen in einem unendlich tiefen Potentialtopf ( $V = 0$ ) einer Hohlleiterwelle vom E-Typ mit Dirichletschen Randbedingungen. Von Stöckmann und Stein (1990, 1997) wurden deshalb in flachen quasi-zweidimensionalen Mikrowellenresonatoren die Eigenfrequenzen von E-Wellen experimentell untersucht. Der Einfluß des Koppelstifts auf die Resonanzspektren kann durch eine schwache Ankopplung klein gehalten werden. Gegenüber Resonatoren geringerer Güte aus Messing gelangen Alt et al (1993) hochaufgelöste Messungen an supraleitenden Niobresonatoren unterhalb von 9 K, bei denen typischerweise 10-15 % mehr Resonanzen gefunden werden können als bei Raumtemperatur. Der hohe experimentelle Aufwand zur Auflösung zweier dicht benachbarter Spektrallinien, läßt allerdings auch den Wunsch nach einer analytischen oder numerischen Behandlung des Randwertproblems aufkommen. Wir untersuchen deshalb mit Hilfe der Methode der finiten Elemente die Grenzfrequenzen elektromagnetischer Wellen in längshomogenen Hohlleitern, bei denen der beliebig geformte Querschnitt unabhängig von der Koordinate  $z$  der Richtung der Wellenausbreitung ist. Auf den elektrisch ideal leitenden Rändern des Hohlleiters müssen die elektrische Feldstärke  $E_z$  bzw. die Normalableitung der magnetischen Feldstärke  $\partial H_z / \partial n$  verschwinden. Mit dem transversalen Laplace-Operator  $\Delta_t = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  lautet damit unser Eigenwertproblem für E-Wellen ( $u_n = E_z$ ) bzw. H-Wellen ( $u_n = H_z$ ):

$$\left[ \Delta_t + (k_n^2 - k_z^2) \right] u_n = (\Delta_t + K_n^2) u_n = (\Delta_t + \Lambda_n) u_n = 0 \quad (2)$$

Die Wellenfunktion  $u_n$  kann man sich aus einer Überlagerung ebener Wellen vorstellen. Während in Hohlleitern mit Kreis- oder Rechteckquerschnitt deren Trajektorien über lange Zeiten mit großer Genauigkeit vorhersagbar sind und symmetrische, regelmäßige Muster bilden, tritt chaotisches Verhalten auf, wenn der Querschnitt z.B. die Form eines Stadions annimmt (**Bild 1**), weil die geraden Randsegmente des Stadions die Rotationssymmetrie des Kreises zerstören. Im Stadion würde nämlich die Bahn eines wie eine Billardkugel hin und her laufenden Teilchens binnen kurzer Zeit ziemlich gleichmäßig den größten Teil des Querschnitts überdecken. Verkürzt man die beiden Geraden des Stadions immer mehr, so entartet das Gebiet schließlich zu einem Kreis und das System wird wieder nichtchaotisch.



**Bild 1.** Trajektorien im Kreis (regelmäßig) und im Stadion (chaotisch) nach McDonald und Kaufman (1988).

Aber auch im Stadion sind nichtchaotische Trajektorien möglich, nämlich solche periodische Bahnen, die dadurch entstehen, daß ein Teilchen in vertikaler Richtung zwischen den geraden Randlinien immer wieder hin und her geworfen wird oder sich horizontal längs der Stadionmittellinie bewegt. Das Stadion ist somit ein gemischtes System mit sowohl chaotischen als auch regulären Spektralanteilen. Die regulären, periodischen Orbits heißen bouncing-ball Moden; sie sind allerdings sehr instabil gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen. Ein Quadrant des Stadions wird als Viertelstadion bezeichnet (**Bild 2**); seine Eigenwerte werden in dieser Arbeit mit Hilfe der Methode der finiten Elemente näher untersucht. Weitergehende Details zu chaotischen Quantensystemen und auch über den interessanten Zugang mittels Zufallsmatrizen findet man bei Gutzwiller (1990), Haake (1991) und Mehta (1991).

## 2 Die Methode der finiten Elemente

Bei der Methode der finiten Elemente wird der felderfüllte Hohlleiterquerschnitt in möglichst gleichseitige Dreieckselemente diskretisiert, auf denen in der MATLAB<sup>®</sup> Partial Differential Equation (PDE) – Toolbox ein linearer Lösungsansatz gemacht wird. Die Genauigkeit der numerischen Ergebnisse der Finite-Elemente-Methode (FEM) verbessert sich mit zunehmender Netzverfeinerung. Dabei kann für Gebiete ohne Kantensingularität der FEM-Approximationsfehler des Eigenwerts im  $i$ -ten Gitter aus  $N_i$  Dreiecken wie

$$\| \Lambda^{(i)} - \Lambda \| = O(N_i^{-1}) \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

abgeschätzt werden. Bei der MATLAB<sup>®</sup> PDE-Toolbox vervierfacht jede Gitterverfeinerung die Anzahl der Dreiecke, d.h. es gilt  $N_{i+1} = 4 N_i$ . Deshalb kann eine verbesserte Näherung für den korrekten Eigenwert  $\Lambda$  aus den ersten Näherungslösungen  $\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \dots, \Lambda^{(i)}, \dots$  der  $i$ -ten Gitter mit Hilfe der Aitken-Extrapolation durch das spaltenweise zu berechnende Romberg-Schema (Kark 1997) berechnet werden:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & \Lambda_{1,1} \\
 & & & & & \Lambda_{2,1} \quad \Lambda_{2,2} \\
 \downarrow & & & & & \Lambda_{3,1} \quad \Lambda_{3,2} \quad \Lambda_{3,3} \\
 & & & & & \Lambda_{4,1} \quad \Lambda_{4,2} \quad \Lambda_{4,3} \quad \Lambda_{4,4} \\
 & & & & & \Lambda_{5,1} \quad \Lambda_{5,2} \quad \Lambda_{5,3} \quad \Lambda_{5,4} \quad \Lambda_{5,5} \\
 & & & & & \rightarrow
 \end{array}
 \quad \text{mit} \quad \Lambda_{i,j} = \frac{4^{j-1} \cdot \Lambda_{i,j-1} - \Lambda_{i-1,j-1}}{4^{j-1} - 1} \quad \text{für} \quad i, j \geq 2. \quad (4)$$

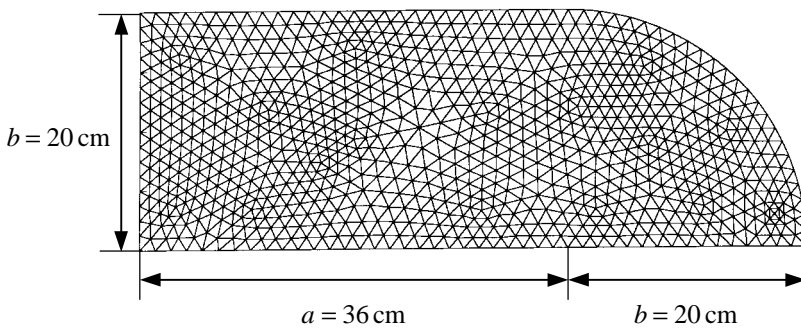
Dazu belegt man die erste Spalte von (4) mit den FEM-Näherungslösungen  $\Lambda_{1,1} = \Lambda^{(1)}, \Lambda_{2,1} = \Lambda^{(2)}, \dots$  und errechnet für  $i, j \geq 2$  die extrapolierten Werte  $\Lambda_{i,j}$ . Am genauesten ist dann die unten rechts stehende Eigenwertnäherung (hier

$\Lambda_{5,5}$ ), deren Fehler man durch Vergleich mit ihren Nachbarelementen abschätzen kann. Sind die Eigenwertdaten nicht lückenlos für alle Gitterverfeinerungen verfügbar, so kann mit  $F$  als Querschnittsfläche des Hohlleiters auch eine in dieser Arbeit empirisch gewonnene Beziehung zur Genauigkeitsverbesserung der Eigenwerte benutzt werden:

$$\Lambda^{(i)} - \Lambda \approx \frac{F \Lambda^2}{2 \pi N_i} . \quad (5)$$

Setzt man den FEM-Eigenwert  $\Lambda^{(i)}$  des  $i$ -ten Gitters hier ein, so ist der neue korrigierte Wert  $\Lambda$  in seiner Genauigkeit vergleichbar mit dem  $\Lambda_{i,2}$ -Wert des Romberg-Schemas. Man erhält somit aus der quadratischen Gl. (5) die Näherung

$$\Lambda \approx \frac{\pi N_i}{F} \cdot \left[ \sqrt{1 + \frac{2F}{\pi N_i} \Lambda^{(i)} - 1} \right] . \quad (6)$$



Für ein Viertelstadion ist in **Bild 2** ein FEM-Gitter mittlerer Dichte gezeigt. Die numerischen Auswertungen dieser Arbeit basieren auf einem wesentlich feineren Gitter mit  $N_5 = 16 N_3 = 28160$  Dreiecken.

$$\text{Fläche: } F = a b + \pi b^2 / 4 = 1034,2 \text{ cm}^2$$

$$\text{Umfang: } U = 2(a + b) + \pi b / 2 = 143,42 \text{ cm}$$

**Bild 2.** Zweite Netzverfeinerung (drittes Gitter) im Viertelstadion mit 937 Knoten und  $N_3 = 1760$  Dreiecken. Die Form des Viertelstadions wird durch den Parameter  $\gamma = a/b$  bestimmt. Hier gilt  $\gamma = 1,8$ . Der Kreis aus **Bild 1** kann mit  $\gamma = 0$  beschrieben werden, das dortige Stadion mit  $\gamma = 1$ .

Die mit der FEM gewonnenen Eigenwertdaten  $\Lambda^{(i)}$  wurden mit Hilfe von (4) bzw. (6) extrapoliert und im folgenden zu statistischen Untersuchungen der Resonanzspektren des Viertelstadions verwendet.

### 3 Das Weylsche Gesetz

Bei Courant und Hilbert (1968) sowie Baltes und Hilf (1976) findet man zur asymptotischen Verteilung der Eigenwerte  $\Lambda$  einer elliptischen Differentialgleichung  $\Delta_t u + \Lambda u = 0$  auf einem einfach zusammenhängenden, zweidimensionalen Gebiet  $\Omega$  der Fläche  $F$  das Weylsche Gesetz  $N = F \Lambda / 4 \pi$ . Es gibt an, wieviele Eigenwerte  $N$  unterhalb einer gegebenen Schranke  $\Lambda$  liegen. Die Anzahl der ausbreitungsfähigen E- oder H-Wellen in einem Hohlleiter der Querschnittsfläche  $F$  ist demnach

$$N_E = N_H = N = \frac{F \Lambda}{4 \pi} \quad (7)$$

und hängt somit in erster Näherung nur von der Fläche aber nicht von der Form des Querschnittes ab. Auf dem Hohlleiterring  $\partial \Omega$  gelte wie üblich  $u = 0$  bei E-Wellen bzw.  $\partial u / \partial n = 0$  bei H-Wellen. Nun ist allerdings allgemein bekannt, daß bei einer gegebenen Frequenz  $f$  (d.h. einer Eigenwertschranke  $\Lambda$ ) stets  $N_E \leq N_H$  gilt. Diese Tatsache berücksichtigt das erweiterte Weylsche Gesetz, in das zusätzlich noch der Umfang  $U$  des Gebietes  $\Omega$  eingeht:

$$N_E = \frac{F \Lambda}{4 \pi} - \frac{U \sqrt{\Lambda}}{4 \pi} \quad \text{bzw.} \quad N_H = \frac{F \Lambda}{4 \pi} + \frac{U \sqrt{\Lambda}}{4 \pi} . \quad (8)$$

Eine noch weitergehende Verfeinerung dieser asymptotischen Gesetzmäßigkeiten findet man bei Stifter (1997):

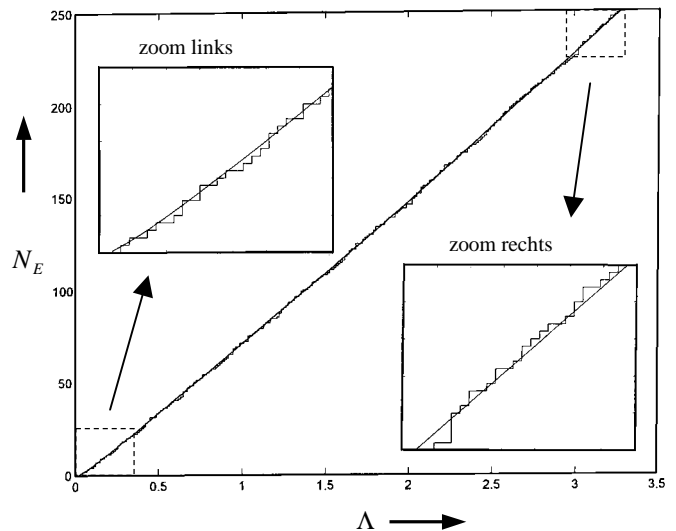
$$N_E = \frac{F \Lambda}{4 \pi} - \frac{U \sqrt{\Lambda}}{4 \pi} + \sum_i b(C_i) + \sum_j \frac{\pi^2 - \alpha_j^2}{24 \pi \alpha_j} \quad \text{bzw.} \quad N_H = \frac{F \Lambda}{4 \pi} + \frac{U \sqrt{\Lambda}}{4 \pi} + \sum_i b(C_i) + \sum_j \frac{\pi^2 - \alpha_j^2}{24 \pi \alpha_j} . \quad (9)$$

Die Krümmungsbeiträge der glatten Randsegmente lauten  $b(C_i) = \frac{1}{12\pi} \int_{C_i} K(s) ds$  mit  $K(s)$  als die in der Bogenlänge

$s$  parametrisierte Krümmung eines Randsegments  $C_i$ . Bilden zwei benachbarte Randsegmente eine Ecke mit dem inneren Winkel  $0 < \alpha_j < 2\pi$ , so ist deren Beitrag durch den letzten Summanden in (9) gegeben. Im Rundhohlleiter mit Radius  $a$  ergibt sich daher mit  $K(s) = 1/a$  ein Krümmungsbeitrag von  $1/6$ , während im Rechteckhohlleiter mit  $\alpha_j = \pi/2$  ein gesamter Eckenbeitrag von  $1/4$  zu berücksichtigen ist. Im Viertelstadion, das einen Viertelkreis und 3 rechte Winkel aufweist, überlagern sich Krümmungs- und Eckenbeiträge zu  $1/24 + 3/16 = 11/48$ . Ist ein Gebiet mehrfach zusammenhängend, z.B.  $\Omega = \Omega_a - \Omega_i$ , so ist die Wellenzahl des inneren von der des äußeren Gebiets abzuziehen. Im Viertelstadion mit den Abmessungen aus **Bild 2**

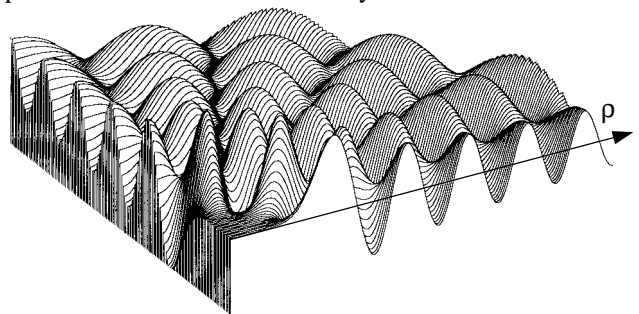
liefert die asymptotische Abschätzung (9) z.B. für  $\Lambda \leq 5,8$  als Anzahl der Eigenmoden die Werte  $N_E = 450$  und  $N_H = 505$ , die mit der wahren Anzahl sogar exakt übereinstimmen! Die spektrale Stufenfunktion der tatsächlich ausbreitungsfähigen E-Wellen (mit (4) extrapolierte FEM-Daten) ist gemeinsam mit der asymptotischen Kurve  $N_E$  nach (9) in **Bild 3** für das untersuchte Viertelstadion im Bereich  $0 < \Lambda < 3,5$  dargestellt. Die Ausschnittsvergrößerungen geben die Bereiche  $0 < \Lambda < 0,35$  und  $2,95 < \Lambda < 3,3$  wieder. Die Übereinstimmung ist sehr gut.

**Bild 3.** Anzahl der bis zum Eigenwert  $\Lambda$  ausbreitungsfähigen E-Wellen im Viertelstadion aus **Bild 2**. Darstellung der spektralen Stufenfunktion aus mit (4) extrapolierten FEM-Daten und des asymptotischen Zusammenhangs (9).



## 4 Bouncing-ball Moden

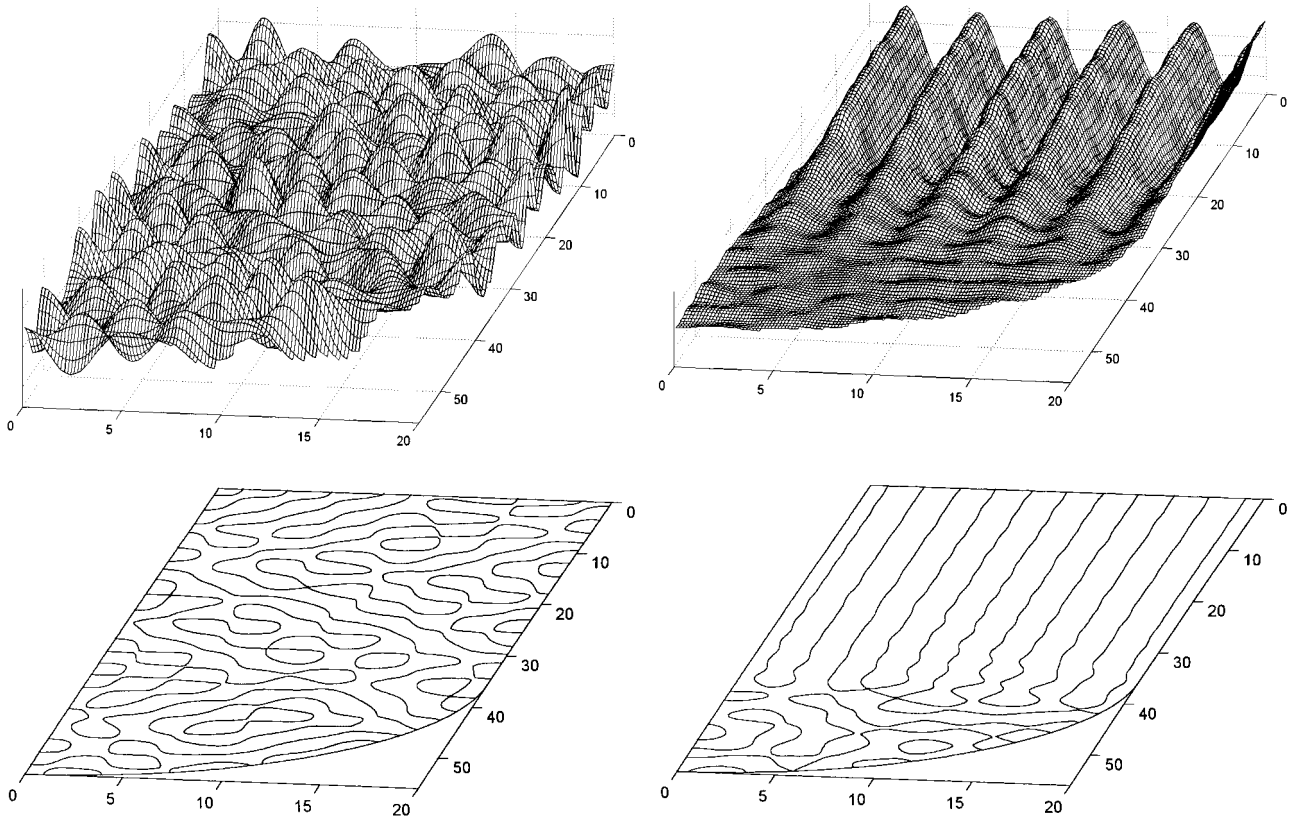
Nachdem wir zunächst nur die Anzahl der ausbreitungsfähigen Eigenmoden in längshomogenen Hohlleitern untersucht haben, wollen wir jetzt herausfinden, welche dieser Wellen symmetrische, reguläre Feldverteilungen besitzen und welche eher eine chaotische Struktur aufweisen. Beispielsweise haben im kreiszylindrischen Hohlleiter alle möglichen Eigenwellen eine hohe Symmetrie. Die periodische Umfangsabhängigkeit  $\cos m\varphi$  des  $H_z$ -Längsfeldes einer  $H_{10,10}$ -Welle und ihr regulärer radialer Verlauf, der durch die Besselfunktion bestimmt wird, ist in **Bild 4** gut zu erkennen, wo ein Quadrant des Rundhohlleiters dargestellt ist. Die  $H_{10,10}$ -Welle ist die 497. H-Welle des Rundhohlleiters, wobei entartete orthogonale Polarisierungen doppelt zählen.



**Bild 4.** Ausschnitt (1. Quadrant) des  $H_z(\rho, \varphi)$ -Feldes der  $H_{497}$ -Welle im Rundhohlleiter mit Radius  $a = 20$  cm und Eigenwert  $\Lambda = (j'_{10,10}/a)^2 = 4,7539$ .

In einem Hohlleiter, dessen Querschnitt die Form eines Viertelstadions aufweist, sind solche hochsymmetrischen Feldverteilungen i.a. nicht anzutreffen. Die Verteilung des  $H_z$ -Feldes z.B. der 260. H-Welle ist vielmehr stark irregulär und eher zufällig (links im **Bild 5**). Auch ihre Knotenlinien  $H_z = 0$  weisen keine auffällige Struktur auf. Im Viertelstadion sind solche chaotischen Eigenmoden die Regel, daneben gibt es aber auch eine kleinere Zahl von Feldlösungen mit geordneter Symmetrie, sogenannte bouncing-ball Moden, die wie eine  $H_{0n}$ -Welle im Rechteckhohlleiter zwischen den geraden Randsegmenten des Viertelstadions hin und her reflektiert werden. Ihre überwiegend geordnete Struktur verliert sich allerdings im Bereich des Viertelbogens. Eine solche Welle ist z.B. die  $H_{264}$ -Welle (rechts im **Bild 5**), die genau 11 nahezu parallele Knotenlinien besitzt. Ihr Eigenwert kann überraschend genau durch  $\Lambda \approx (n\pi/b)^2$  abgeschätzt werden.

Mit  $n=11$  und  $b=20\text{cm}$  erhält man nämlich  $\Lambda \approx 2,9856$ , was vorzüglich mit dem nach (6) extrapolierten FEM-Eigenwert  $\Lambda = 2,9857$  übereinstimmt.



**Bild 5.**  $H_z$ -Gebirge der chaotischen  $H_{260}$ -Welle (links oben) mit Eigenwert  $\Lambda = 2,9408$  und rechts oben der regulären  $H_{264}$ -Welle ( $\Lambda = 2,9857$ ) im Viertelstadium nach **Bild 2**. Jeweils darunter sind die Knotenlinien  $H_z = 0$  beider Wellen dargestellt.

Die offensichtliche Existenz zweier grundverschiedener Arten von Eigenwellen im Viertelstadium mit chaotischen bzw. regulären Feldverteilungen erfordert eine genauere Untersuchung ihres Auftretens und ihrer Häufigkeit.

## 5 Chaotische und reguläre Spektren

Zur Untersuchung unbekannter Eigenwertspektren benutzt man statistische Verfahren, die sich seit langem schon in der Kernphysik bei der Analyse von Spektren komplizierter Kerne bewährt haben (Porter 1965). Man betrachtet dazu die Häufigkeitsverteilung der Abstände benachbarter Eigenwerte. Die auf ihren Mittelwert normierten Abstände der Eigenwerte  $\Lambda_n$  zum direkten Vorgänger  $\Lambda_{n-1}$

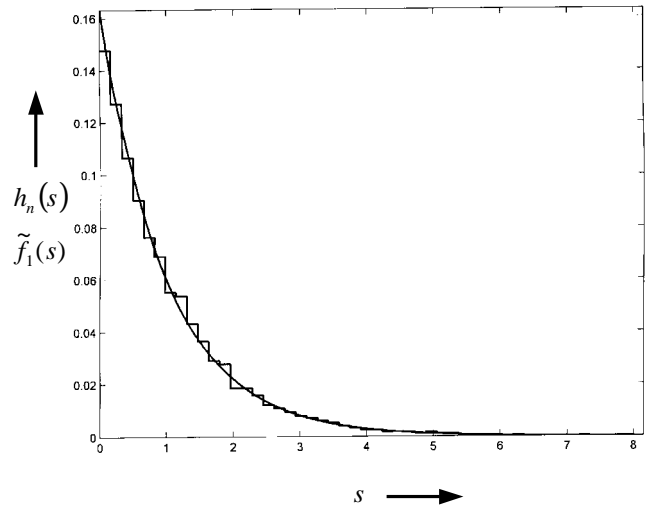
$$s_n = (\Lambda_n - \Lambda_{n-1}) / \langle \Lambda_n - \Lambda_{n-1} \rangle \quad (10)$$

sind in nichtchaotischen Systemen zufällig und unkorreliert verteilt. Bei chaotischen Systemen beobachtet man dagegen im Bereich kleiner Abstände eine lineare Abstoßung benachbarter Eigenwerte. Für die Abstände  $s_n$  erhält man in einem Rechteckhohlleiter deshalb eine Poisson- oder Exponentialverteilung, während rein chaotische Systeme eine Wigner-Verteilung aufweisen (Steeb 1994). Der mittlere Eigenwertabstand ist in beiden Fällen unabhängig von  $\Lambda$ .

Die genannten Wahrscheinlichkeitsdichten  $f(s)$  und die zugehörigen Verteilungsfunktionen  $F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau$  sind:

$$\begin{aligned} f_1(s) &= e^{-s} & \Leftrightarrow & F_1(s) = 1 - e^{-s} & \text{Poisson-Verteilung (regulär)} \\ f_2(s) &= \frac{\pi}{2} s e^{-\pi s^2/4} & \Leftrightarrow & F_2(s) = 1 - e^{-\pi s^2/4} & \text{Wigner-Verteilung (chaotisch).} \end{aligned} \quad (11)$$

Zur statistischen Auswertung wurden in einem Rechteckhohlleiter mit irrational gewähltem Seitenverhältnis  $a/b = 3e/1,1\pi \approx 2,36$  die ersten 22605 H-Wellen mit den Eigenwerten  $\Lambda = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 \leq 10000$  untersucht. Die gefundenen Eigenwertabstände wurden in 50 gleichbreite Klassen (bins) aufgeteilt und die relative Klassenhäufigkeit  $h_n(s)$  in einem Histogramm aufgetragen (**Bild 6**). Die glatte Kurve der normierten Poisson-Verteilung  $\tilde{f}_1(s) = f_1(s) \cdot \max(s)/\text{bins}$  stimmt sehr gut mit der Treppenkurve  $h_n(s)$  überein, da im Rechteckhohlleiter keine chaotischen Eigenmoden auftreten können. Ein rationales Seitenverhältnis  $a/b$  würde viele entartete Moden hervorbringen und dadurch den ersten Balken stark überhöhen. Dieser sogenannte Shnirelman-Peak stört dann gewissermaßen die sonst erwartete Statistik (Stifter 1997).

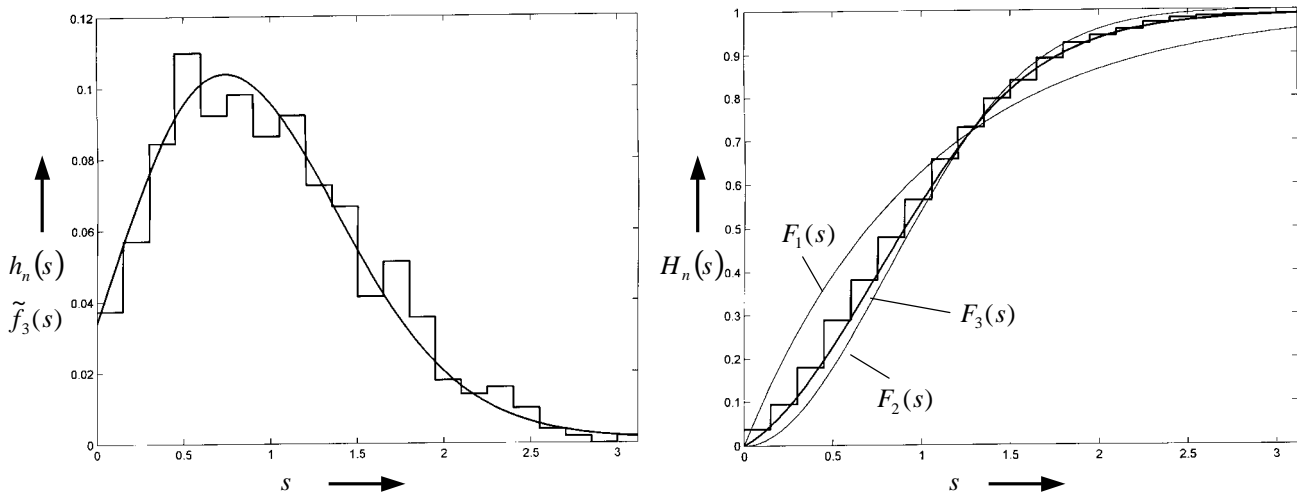


**Bild 6.** Relative Klassenhäufigkeit (Treppenkurve) und Poisson-Verteilungsdichte der normierten Eigenwertabstände in einem Rechteckhohlleiter.

Das Stadion und das Viertelstadion sind dagegen gemischte Systeme mit sowohl chaotischen als auch regulären Lösungen (bouncing-ball Moden). Sie können durch eine gemischte Statistik mit einem zunächst noch unbekanntem Chaosanteil  $0 < C < 1$  beschrieben werden:

$$f_3(s) = (1-C) \cdot e^{-s} + C \cdot \frac{\pi}{2} s e^{-\pi s^2/4} \quad \Leftrightarrow \quad F_3(s) = (1-C) \cdot (1 - e^{-s}) + C \cdot (1 - e^{-\pi s^2/4}). \quad (12)$$

Im Viertelstadion wurden daher 505 H-Wellen bis  $\Lambda = 5,8$  untersucht. Die gefundenen Eigenwertabstände, deren Mittelwert 0,0115 beträgt, wurden in 21 gleichbreite Klassen (bins) aufgeteilt und wieder die relative Klassenhäufigkeit  $h_n(s)$  in einem Histogramm aufgetragen (**Bild 7**). Daneben ist die kumulative Häufigkeit  $H_n(s)$  als Treppenkurve dargestellt, die als summierte Größe natürlich geringere Fluktuationen aufweist. Eine bestmögliche Übereinstimmung dieser numerischen FEM-Daten mit dem Modell der gemischten Statistik (12) erhält man, wenn man  $f_3(s) = f_3(s) \cdot \max(s)/\text{bins}$  für  $C = 0,773$  aufträgt. Damit lassen sich die 505 H-Wellen in 390 chaotische und in 115 bouncing-ball Moden unterteilen. Die Eigenwertabstoßung bei kleinen Abständen  $s$ , die nur innerhalb des chaotischen Spektralanteils auftritt, ist im Vergleich mit **Bild 6** gut erkennbar.



**Bild 7.** Relative Klassenhäufigkeit  $h_n(s)$  der normierten Eigenwertabstände im Viertelstadion nach **Bild 2** mit glatter Anpassungskurve der gemischten Poisson-Wigner-Statistik ( $\tilde{f}_3(s)$ , links), die auch die kumulative Häufigkeit  $H_n(s)$  am besten beschreibt ( $F_3(s)$ , rechts). Die Poisson-Verteilungsfunktion  $F_1(s)$  oder die Wigner-Verteilungsfunktion  $F_2(s)$  weichen dagegen deutlich von der Treppenkurve  $H_n(s)$  ab.

Eine solche Anpassung der Verteilungsfunktionen an die numerischen Daten ermöglicht auf elegante Weise die Bestimmung des Chaosfaktors  $C$  und somit der Anzahl der bouncing-ball Moden  $N_{bb}$  im gesamten Modenspektrum - ohne sie erst Stück für Stück abzählen zu müssen. Es wurde folgender asymptotischer Zusammenhang festgestellt:

$$N_{bb} = \frac{\sqrt{F \cdot U}}{4 \pi} \Lambda^{0,75} . \quad (13)$$

Mit den Geometriedaten  $F$  und  $U$  des Viertelstadions nach **Bild 2** ergibt sich bei einem maximalen Eigenwert von  $\Lambda = 5,8$  hieraus wieder  $N_{bb} = 115$ . Mit  $C = 1 - N_{bb}/N_H$  kann daraus der Chaosfaktor, also der relative Anteil chaotischer Moden am gesamten Modenspektrum, abgeleitet werden. Für große Eigenwerte  $\Lambda$  gilt unter Beachtung von (9):

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{N_{bb}}{N_H} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \sqrt{U/F} \cdot \Lambda^{-0,25} = 0 . \quad (14)$$

Damit kommen die bouncing-ball Moden im Spektrum des Viertelstadions keinesfalls gleichverteilt vor. Bei hohen Eigenwerten  $\Lambda$  dominieren nämlich eher die chaotischen Spektralanteile. Die Eigenwertabstoßung zwischen bouncing-ball und chaotischen Eigenmoden ist schwach im Vergleich mit der Abstoßung zweier chaotischer Eigenzustände (Taner 1997).

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Chaos im klassischen Sinne tritt bekanntermaßen bei rückgekoppelten dynamischen Systemen auf. Das Quanten- Analogon zu klassischem Chaos manifestiert sich dagegen völlig anders (Gutzwiller 1992). Zum einen haben die Eigenfunktionen, die zu klassisch chaotischen Bahnen gehören, irreguläre Knotenlinien. Zum anderen müssen die Abstände zweier benachbarter Eigenwerte einer Wigner-Verteilung gehorchen. Die Eigenwerte in Quantenchaos-Systemen stoßen sich daher ab, es kommt zu keiner Clusterung wie in nichtchaotischen Systemen, die stark von Entartungen geprägt sind. Anhand eines Viertelstadion-Billard konnte teilweise chaotisches Verhalten beobachtet werden. Mit der Methode der finiten Elemente wurden hierzu die Eigenwerte und Eigenmoden von 505 H-Resonanzen bestimmt und statistisch ausgewertet. Die Anpassung einer gemischten Poisson-Wigner-Statistik an die numerisch ermittelten Eigenwertabstände ermöglichte eine neuartige Abschätzung der Anzahl der bouncing-ball Moden im nichtchaotischen Anteil des Spektrums (13). Ergänzend könnten auch Abstände zwischen Nachbarn höherer Ordnung betrachtet werden. Die normierten Abstände der Eigenwerte zum Vorgänger, Vorvorgänger usw.

$$s_n^{(i)} = (\Lambda_n - \Lambda_{n-i}) / \langle \Lambda_n - \Lambda_{n-1} \rangle \quad (15)$$

haben dann die Erwartungswerte  $\langle s_n^{(i)} \rangle = i$  für  $i = 1, 2, 3, \dots$  und wurden bereits von Porter (1965) bei der Betrachtung der Eigenwerte von Zufallsmatrizen in ähnlicher Form verwendet. Besonders interessant erscheint auch die Untersuchung der Eigenwertdynamik bei Variation des Geometrieparameters  $\gamma = a/b$  (**Bild 2**). Es sollte sich für wachsendes  $\gamma \geq 0$  ein fließender Übergang von einer Poisson- zur Wigner-Verteilung ergeben. Neben Stadion-, Hyperbel-, Kardiod- und Cosinus-Billard gehört auch das Sinai-Billard zu den meistuntersuchten chaotischen Modellsystemen (Stöckmann 1997). Es besitzt eine rechteckförmige äußere Berandung mit einer zentralen kreisförmigen Aussparung, kann also als Rechteckhohlleiter mit koaxialem, kreisförmigem Innenleiter betrachtet werden. Auch dreidimensionale Erweiterungen sind denkbar, beispielsweise ein würfelförmiger Resonator mit einer Kugel in seinem Zentrum.

## 7 Literaturangaben

- Alt, H. et al: Resonances of a superconducting microwave cavity. Nuclear Physics A 560, 293-305, 1993.  
 Baltés, H.P.; Hilf, E.R.: Spectra of finite systems. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1976.  
 Courant, R.; Hilbert, D.: Methoden der Mathematischen Physik. Springer, Berlin, 1968.  
 Gutzwiller, M.C.: Chaos in classical and quantum mechanics. Springer, New York, 1990.  
 Gutzwiller, M.C.: Quantenchaos. Spektrum der Wissenschaft, März 1992.  
 Haake, F.: Quantum signatures of chaos. Springer, Berlin, 1991.  
 Kark, K.W.: Finite-Elemente-Lösung von Eigenwellen in Hohlleitern mit geschichteter anisotroper Füllung. Kleinheubacher Berichte 41, 535-541, 1997.  
 McDonald, S.W.; Kaufman, A.N.: Wave chaos in the stadium. Physical Review A 37, 3067-3086, 1988.  
 Mehta, M.L.: Random matrices. Academic Press, San Diego, 1991.  
 Porter, C.E.: Statistical theories of spectra: fluctuations. Academic Press, New York, 1965.  
 Steeb, W.-H.: Chaos und Quantenchaos in dynamischen Systemen. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1994.

Stifter, P.: Quantenbillards und Quantenchaos. Dissertation an der Abteilung für Quantenphysik der Universität Ulm, 1997.

Stöckmann, H.-J.; Stein, J.: „Quantum“ chaos in billiards studied by microwave absorption. *Physical Review Letters* 64, 2215-2218, 1990.

Stöckmann, H.-J.: Quantenchaos zum Anfassen - das Mikrowellenbillard. *Physikalische Blätter* 53, 121-126, 1997.

Tanner, G.: How chaotic is the stadium billiard? A semiclassical analysis. *Journal of Physics A: Math. Gen.* 30, 2863-2888, 1997.