

Konvergenz und Wichtung von Orthogonalreihen bei Beugungsproblemen

Convergence and Weight Factors of Eigenfunction Expansions in Diffraction Problems

Übersicht

Zur Lösung kanonischer Randwertprobleme stellt die Methode der Entwicklung nach orthogonalen Eigenfunktionen ein analytisch exaktes und numerisch effizientes Rechenverfahren dar. Ungenauigkeiten bei der numerischen Auswertung sind aufgrund des Abbruchs der Orthogonalreihen allerdings unvermeidlich. Treten Kantensingularitäten auf, so ergeben sich bei der Summation der Orthogonalreihen aufgrund des Gibbs'schen Phänomens unphysikalische Überschwinger, die das Ergebnis zusätzlich verfälschen. Es wird ein Weg gezeigt, wie man trotz dieser Schwierigkeiten physikalisch sinnvolle Ergebnisse durch eine geeignete Wichtung der Reihen gewinnen kann.

Abstract

The mode-matching method is an analytically rigorous and numerically efficient technique for solving canonical boundary value problems. Finite series expansions lead to numerical inaccuracies, which in addition increase whenever edge singularities occur because of non-physical overshoot due to the Gibbs phenomenon. A method of using weighted series will be shown to overcome these difficulties and get physically meaningful results.

Von Klaus Kark

Mitteilung aus dem Institut
für Nachrichtentechnik
der Fachhochschule
Ravensburg-Weingarten

Für die Dokumentation

Orthogonalentwicklung / Hohlleiterverzweigung / Kantensingularität / Konvergenz / Feldlinien / Stetigkeit / Gibbs'sches Phänomen / Wichtung / Spektraltaperung

1. Einleitung

In dieser Arbeit soll eine Klasse von elektromagnetischen Randwertproblemen untersucht werden, die dadurch gekennzeichnet ist, daß abschnittsweise homogene Wellenleiter durch einen sprunghaften Übergang miteinander verbunden sind. Falls die Querschnitte der beteiligten Leitungen von einfacher Form sind, so z. B. Rechtecke oder Kreise, so können deren Eigenwellen als exakte Lösung des Randwertproblems angegeben werden [14]. Jede physikalisch mögliche Feldverteilung auf solchen Strukturen kann dann in eine unendliche Orthogonalreihe über diese Eigenwellen entwickelt werden. Eine solche Orthogonalreihe aus N Termen konvergiert für $N \rightarrow \infty$ mit mittlerem quadratischen Fehler Null gegen die exakte Feldlösung.

Zur numerischen Auswertung muß jede Orthogonalreihe jedoch nach endlich vielen Termen abgebrochen werden. Dadurch entsteht ein Approximationsfehler, der im Gesamtfeld und besonders in den Entwicklungskoeffizienten der höheren Wellentypen sichtbar wird. Nach einem kurzen Überblick zur mathematischen Methode der Orthogonalentwicklung wird in dieser Arbeit zunächst das Konvergenzverhalten von endlichen Orthogonalreihen eingehend untersucht. Dabei wird vom bekannten Verhalten der unendlichen Orthogonalreihen ausgegangen [5, 12, 15].

An spitzen Knicken oder an Sprüngen zwischen homogenen Leitungsteilen treten Feldsingularitäten auf [10]. Die Darstellung von Singularitäten durch abbrechende Orthogonalreihen gelingt allerdings nur ansatzweise. Ein wesentliches Problem besteht darin, daß in der Nähe der Singularität unphysikalische Überschwinger bei der Summation der Reihen auftreten, die das numerische Ergebnis stark verfälschen können. Das Verhalten ähnelt dem aus der Theorie der Fourier-Reihen wohlbekannten Gibbs'schen Phänomen [1], das man durch geeignete Tiefpaßfilterung beseitigen kann [2, 8].

Als Folge der Überschwinger erfüllen die Orthogonalreihen der aneinandergrenzenden Raumteile auch nicht die Stetigkeitsbedingung in der Trennfläche. Wie im folgenden gezeigt wird, kann eine schwächere Gewichtung der höheren Wellentypen die Gibbs'schen Überschwinger vermeiden und zu einem glatten, stetigen Feldverlauf in der Trennfläche führen, der die physikalische Realität besser beschreibt. Der rechnerische Aufwand zur Erweiterung der Methode ist sehr gering, doch können damit wesentlich genauere Ergebnisse erzeugt werden.

2. Analyseverfahren

Die Untersuchungen zur Konvergenz und Wichtung von Orthogonalreihen werden am praktischen Beispiel der Hohlleiterverzweigung aus Bild 1 durchgeführt. Das für alle drei Teilhohlleiter gleiche kartesische Koordinatensystem befindet sich in der Mitte des großen Hohlleiters III. Es wird stets eine eingeschwungene harmonische Zeitabhängigkeit angenommen, für die man zur Bequemlichkeit die komplexe Darstellung $e^{i\omega t}$ einführt und komplexe Amplituden (Phasoren) durch Unterstreichen kennzeichnet. Die Felder in allen drei Raumteilen werden in unendliche Reihen über trigonometrische Eigenfunktionen entwickelt. Mit \underline{a}_n^I , \underline{a}_n^{II} und \underline{a}_n^{III} werden die Phasoren der auf die Trennfläche bei $z = 0$ zulaufenden Wellen mit $n = 1, 2, 3 \dots$ bezeichnet. Entsprechend beschreiben \underline{b}_n^I , \underline{b}_n^{II} und \underline{b}_n^{III} die an der Trennfläche reflektierten Wellenanteile. In der Trennfläche bei $z = 0$ ermöglicht eine gegenläufige Orthogonalentwicklung [14] die stetige Anpassung der tangentialen Feldkomponenten sowie die Erfüllung der Randbedingungen auf der metallenen Stirnseite der Breite a und Höhe $b_3 - b_1 - b_2 \geq 0$.

2.1 Felddarstellungen

Da wir als Anregung der Struktur nur H_{01} -Wellen betrachten wollen, werden in der Trennfläche bei $z = 0$ ausschließlich H_{0n} -Wellen mit $n = 1, 2, 3 \dots$, die keine Feldabhängigkeit in x -Richtung aufwei-

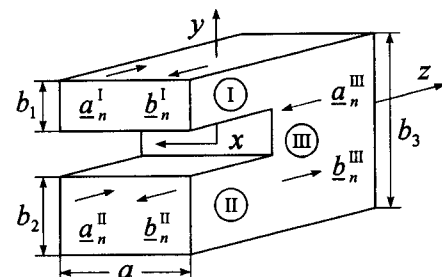


Bild 1: Hohlleiterverzweigung in der H -Ebene, in der sich nur H_{0n} -Wellen mit den Feldkomponenten E_x , H_y und H_z ausbreiten. Die relativ zur Trennfläche bei $z = 0$ zu- bzw. weglauenden Wellenamplituden in den drei Raumteilen werden mit \underline{a}_n und \underline{b}_n bezeichnet. Alle metallischen Wände sind elektrisch ideal leitend ($\kappa \rightarrow \infty$).

sen, angeregt. Eine H_{0n} -Welle besitzt nur drei Feldkomponenten. Beispielhaft wird für den Raumteil III der vollständige Feldansatz angegeben:

$$\underline{E}_x^{\text{III}}(y,z) = -\sqrt{\frac{2}{ab_3}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sin[n\pi(y+b_3/2)/b_3] \cdot \sqrt{\underline{Z}_n^{\text{III}}} \cdot \left(\underline{b}_n^{\text{III}} e^{-\underline{\gamma}_n^{\text{III}} z} + \underline{a}_n^{\text{III}} e^{\underline{\gamma}_n^{\text{III}} z} \right), \quad (1a)$$

$$\underline{H}_y^{\text{III}}(y,z) = -\sqrt{\frac{2}{ab_3}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sin[n\pi(y+b_3/2)/b_3] \cdot \sqrt{\underline{Y}_n^{\text{III}}} \cdot \left(\underline{b}_n^{\text{III}} e^{-\underline{\gamma}_n^{\text{III}} z} - \underline{a}_n^{\text{III}} e^{\underline{\gamma}_n^{\text{III}} z} \right), \quad (1b)$$

$$\underline{H}_z^{\text{III}}(y,z) = \frac{-1}{j\omega\mu_0} \cdot \sqrt{\frac{2}{ab_3}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b_3} \cdot \cos[n\pi(y+b_3/2)/b_3] \cdot \sqrt{\underline{Z}_n^{\text{III}}} \cdot \left(\underline{b}_n^{\text{III}} e^{-\underline{\gamma}_n^{\text{III}} z} + \underline{a}_n^{\text{III}} e^{\underline{\gamma}_n^{\text{III}} z} \right). \quad (1c)$$

Dabei sind

$$\underline{Z}_n^{\text{III}} = 1/\underline{Y}_n^{\text{III}} = \frac{k_0}{-j\underline{\gamma}_n^{\text{III}}} \cdot Z_0 \quad (2)$$

mit $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ und $k_0 = 2\pi/\lambda_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ die Feldwellenwiderstände der H_{0n} -Wellen im Raumteil III. Die Ausbreitungskonstanten

$$\underline{\gamma}_n^{\text{III}} = \begin{cases} j\underline{\beta}_n^{\text{III}} = j\sqrt{k_0^2 - (n\pi/b_3)^2} \\ \underline{\alpha}_n^{\text{III}} = \sqrt{(n\pi/b_3)^2 - k_0^2} \end{cases} \quad (3)$$

sind imaginär für ausbreitungsfähige Wellen ($n < 2b_3/\lambda_0$) und reell für gedämpfte cutoff-Wellen. In den Raumteilen I und II werden entsprechende Reihen angesetzt. Alle Orthogonalreihen müssen für die numerische Auswertung bei einem gewissen Modenindex jeweils abgebrochen werden.

2.2 Orthogonalentwicklung

Die Berechnung der Hohlleiterverzweigung nach Bild 1 erfordert die Erfüllung sowohl der Stetigkeit in den Trennflächen der Teilhohlleiter als auch der Randbedingung an der Mittelblende im Raumteil III. Wegen der Leitfähigkeit $\kappa \rightarrow \infty$ aller Hohlleiterwände fordert man bei $z = 0$ (jeweils im Bereich $-a/2 \leq x \leq a/2$):

$$\underline{E}_x^{\text{III}} = \begin{cases} \underline{E}_x^{\text{II}} & \text{für } -b_3/2 \leq y \leq -b_3/2 + b_2, \\ 0 & \text{für } -b_3/2 + b_2 \leq y \leq b_3/2 - b_1, \\ \underline{E}_x^{\text{I}} & \text{für } b_3/2 - b_1 \leq y \leq b_3/2; \end{cases} \quad (4)$$

$$\underline{H}_y^{\text{III}} = \begin{cases} \underline{H}_y^{\text{II}} & \text{für } -b_3/2 \leq y \leq -b_3/2 + b_2, \\ \underline{H}_y^{\text{I}} & \text{für } b_3/2 - b_1 \leq y \leq b_3/2. \end{cases} \quad (5)$$

Man setzt nun die Reihendarstellungen der Feldkomponenten in die Beziehungen (4) und (5) ein. Dabei werden die höchsten Modenindizes n_1 , n_2 und n_3 in den drei Raumteilen entsprechend der Linearabmessung der jeweiligen Hohlleiterhöhe gewählt:

$$\frac{n_1}{b_1} = \frac{n_2}{b_2} = \frac{n_3}{b_3}. \quad (6)$$

Man gibt sich z. B. ein n_3 vor und errechnet n_1 und n_2 als diejenigen natürlichen Zahlen, die die Bedingung (6) am besten erfüllen. Eine gegenläufige Orthogonalentwicklung der tangentialen E -Felder der Raumteile I und II nach den Eigenfunktionen des großen Raumteils III und der tangentialen H -Felder in umgekehrter Richtung sichert die gleichzeitige Erfüllung der Stetigkeits- und Randbedingungen in der Trennfläche. Die Koppelintegrale können analytisch berechnet werden. Damit erhält man die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten aller ausbreitungsfähigen und cutoff- H_{0n} -Wellen in allen drei Raumteilen, die man in einer Streumatrix $[\underline{S}]$ vom Rang $n_1 + n_2 + n_3$ anordnet. Es bietet sich eine Sortierung nach aufsteigendem Modenindex n , d. h. nach wachsender Grenzfrequenz, an. Als Test für die numerische Genauigkeit der Streumatrix können die bekannten Beziehungen mit ihrer Transponierten und ihrer Inversen benutzt werden: $[\underline{S}] = [\underline{S}]^T = [\underline{S}]^{-1}$.

3. Die Kantenbedingung

Die Hohlleiterverzweigung nach Bild 1 weist an den Stoßstellen der Teilhohlleiter Kanten auf. Für die strenge Beugungslösung an unendlich gut leitenden dünnen Schirmen oder keilförmigen Streukörpern muß nach [10] die Kantenbedingung erfüllt werden. Dazu betrachten wir in Bild 2 einen metallischen Keil mit ideal scharfer, geradliniger Kante C. Die Kante diene als z -Achse eines zylindrischen Koordinatensystems (ρ, φ, z) . Läßt man nun eine elektromagnetische Welle auf den Keil einfallen, so wird sie einerseits an den Keilflächen reflektiert, zusätzlich aber auch an der Kante gebeugt. Es stellt sich durch Überlagerung der einfallenden, reflektierten und der gebeugten Welle ein Gesamtfeld ein, das wir in unmittelbarer Kantennähe betrachten wollen. Die gespeicherte elektrische und magnetische Energie in jeder endlich großen Umgebung einer Kante muß beschränkt sein. Zieht man das eine quellensfreie Kante umgebende Volumen V mit seiner Oberfläche A auf Null zusammen, dann muß deswegen

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow 0} j\omega \iiint_V \left(\epsilon_0 |\underline{E}|^2 - \mu_0 |\underline{H}|^2 \right) dV \\ = \lim_{A \rightarrow 0} \iint_A \left(\underline{E} \times \underline{H}^* \right) \cdot d\vec{A} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

gelten. Dies ist der komplexe Poyntingsche Satz für quellensfreie, nichtleitende Medien. Er sagt aus, daß die Kante selbst nicht strahlt. Umschließt man die gerade Kante in Bild 2 mit einem zylindrischen Volumenelement $dV = \rho d\rho dz$, so sieht man wegen des metrischen Koeffizienten ρ sofort, daß die stärkste Kantensingularität der E - und H -Felder höchstens von der Ordnung $O(\rho^{-1/2})$ sein kann. Zur genaueren Betrachtung teilen wir in Tabelle 1 die im allgemeinen sechs Feldkomponenten des Gesamtfeldes am leitenden Keil nun in zwei Gruppen ein. In [12] wird ausführlich gezeigt, daß bei kleinen Abständen $\rho \ll \lambda_0$ von der Kante die Feldkomponenten von folgender Größenordnung sein müssen:

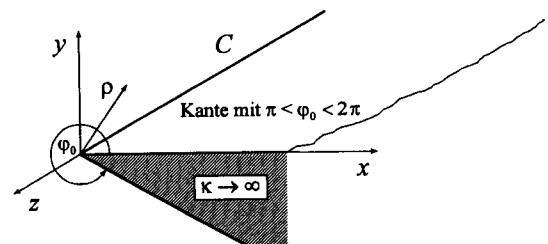


Bild 2: Elektrisch ideal leitender Keil ($\kappa \rightarrow \infty$) mit scharfer, geradliniger Kante C. Direkt auf der Kante C verschwinden die Längsfeldstärken, und die Quersfeldstärken werden singular.

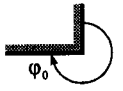
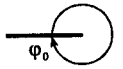
$$\begin{aligned} \underline{E}_z, \underline{H}_z &= O(\rho^{\pi/\varphi_0}) \text{ und} \\ \underline{E}_\rho, \underline{E}_\varphi, \underline{H}_\rho, \underline{H}_\varphi &= O(\rho^{-1+\pi/\varphi_0}). \end{aligned} \quad (8)$$

Tabelle 1: Längs- und Querfeldstärken relativ zur Kante des metallischen Keils aus Bild 2

| | |
|------------------|--|
| Längskomponenten | $\underline{E}_z, \underline{H}_z$ |
| Querkomponenten | $\underline{E}_\rho, \underline{E}_\varphi, \underline{H}_\rho, \underline{H}_\varphi$ |

Im Grenzfall $\rho \rightarrow 0$, also direkt auf der Kante, verschwinden darum die Längsfeldstärken. Die Querfeldstärken werden dort singular, falls $\pi < \varphi_0 < 2\pi$ gilt. Erweiterungen der Kantenbedingung auf dielektrische Keile findet man u. a. in [3] und [6]. Im Falle $0 < \varphi_0 < \pi$ hat man keine „äußere“ Kante sondern einen „inneren“ Winkel, an dem für $\rho \rightarrow 0$ keine der sechs Feldkomponenten singular wird. Der Sonderfall $\varphi_0 = \pi$ liefert die bekannte Reflexion an einer ebenen, metallischen Wand, die unter dem Gesichtspunkt von Kantensingularitäten nicht interessant ist. Die stärkste Kantensingularität, die überhaupt auftreten kann, erhält man beim unendlich dünnen Schirm, der aus der allgemeinen Kante im Grenzfall $\varphi_0 \rightarrow 2\pi$ entsteht. Hier gehen die Querfeldstärken mit abnehmendem Kantenabstand ρ wie $\rho^{-1/2}$ gegen unendlich. Für das Beispiel der Hohlleiterverzweigung nach Bild 1 sind unter der Nebenbedingung $b_3 \geq b_1 + b_2$ nur die Kantenarten aus **Tabelle 2** von Bedeutung.

Tabelle 2: Singularitäten der Querfeldstärken an geraden Kanten berechnet nach (8)

| Kantenform | Kantenwinkel | Singularität |
|---|------------------------------|------------------|
|  | $\varphi_0 = 3\pi/2$ | $O(\rho^{-1/2})$ |
|  | $\varphi_0 \rightarrow 2\pi$ | $O(\rho^{-1/2})$ |

4. Abbruch von Orthogonalreihen

4.1 Konvergenzverhalten

Da nur quer zur Kante liegende Feldkomponenten singular werden können, haben bei der in Bild 1 betrachteten Hohlleiterver-

zweigung mit Kante in x -Richtung und alleiniger Anregung von H_{0n} -Wellen nur die magnetischen Komponenten H_y und H_z eine Singularität, während die elektrische Komponente E_x an der Kante eine Nullstelle aufweisen muß. Bei den Reihenansätzen der Orthogonalentwicklung wurde die Kantenbedingung nicht explizit eingearbeitet. Es ist daher notwendig, ihre Erfüllung anhand der numerischen Ergebnisse nachträglich zu überprüfen. Wir wollen hierzu das asymptotische Abfallen der Beträge $b_n^{\text{III}} = |\underline{b}_n^{\text{III}}|$ der komplexen Entwicklungskoeffizienten mit zunehmender Modenordnung n betrachten. Von vielen anderen Autoren (z. B. [5, 12, 15]) wurden bereits ausführliche Untersuchungen zur Konvergenz von unendlichen Orthogonalreihen unter Berücksichtigung der Kantenbedingung durchgeführt. Darum wollen wir uns hier kurz fassen und in **Tabelle 3** lediglich die wesentlichen Ergebnisse zusammentragen.

Die Orthogonalreihen (1a) bis (1c) müssen aus numerischen Gründen jedoch nach einer höchsten, gerade noch mitgenommenen H_{0N} -Welle abgebrochen werden, d. h. mit $N = n_3$ wird



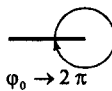
$$\sum_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \sum_{n=1}^{n_3} \quad (9)$$

Aus einer unendlichen Reihe mit bekanntem Konvergenzverhalten ist nun eine mit endlich vielen Termen geworden. Im folgenden wollen wir den Einfluß des Abbruchs der Reihe auf das nach der Kantenbedingung theoretisch geforderte asymptotische Abklingen der Entwicklungskoeffizienten genauer untersuchen. Dazu definieren wir eine symmetrische Hohlleiterverzweigung wie in **Bild 3** mit unendlich dünner Mittelblende als unser Standardproblem. Alle numerischen Ergebnisse, die im folgenden gezeigt werden, beziehen sich auf dieses Feldproblem. Durch zwei aus den kleineren Hohlleitern einfallende H_{01} -Wellen werden reflektierte und transmittierte H_{0n} -Wellen angeregt. Bei phasen- und amplitudengleicher Anregung mit $\underline{a}_1 = \underline{a}_1^{\text{II}}$ und den Abmessungen $a = b_1 = b_2 = 0,7 \cdot \lambda_0$ und $b_3 = 1,4 \cdot \lambda_0$ werden im großen Raumteil III ausschließlich ungerade H_{0n} -Wellen mit $n = 1, 3, 5, \dots$ angeregt. Die Beträge ihrer Wellenamplituden b_n^{III} sind im **Bild 4** durch kleine Kreise markiert. Der höchste Modenindex, nach dem die Reihen abgebrochen wurden, ist $n_3 = 140$. Da nur ungerade Wellentypen auftreten, werden somit 70 Wellen mit $n = 1, 3, 5, \dots, 139$ aufsummiert. Das aus der Kantenbedingung folgende asymptotische Abklingen der Beträge der Fourier-Koeffizienten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^{\text{III}} = O(n^{-1}) \quad (10)$$

kann ab der vierten Eigenwelle, d. h. der H_{07} -Welle, als sehr gut bestätigt gelten, während sich für große Modenindizes n eine Ablösung der Wellenamplituden von der asymptotischen Geraden er-

Tabelle 3: Größenordnung des n -ten Terms (für $n \rightarrow \infty$) in den Orthogonalreihen (1)

| Kantenform | b_n^{III} | singuläre Felder H_y und H_z | nichtsinguläres Feld E_x |
|---|-----------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|
|  | $O(n^{-0,5-\pi/\varphi_0})$ | $O(n^{-\pi/\varphi_0})$ | $O(n^{-1-\pi/\varphi_0})$ |
|  | $O(n^{-7/6})$ | $O(n^{-2/3})$ | $O(n^{-5/3})$ |
|  | $O(n^{-1})$ | $O(n^{-1/2})$ | $O(n^{-3/2})$ |

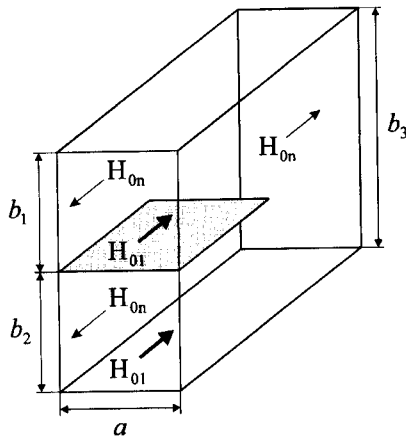


Bild 3: Standardproblem mit symmetrischer Anregung durch zwei identische H_{01} -Wellen
 Abmessungen: $a = b_1 = b_2 = 0,7 \cdot \lambda_0$ und $b_3 = 1,4 \cdot \lambda_0$
 Abbruch der Orthogonalreihen bei $n_1 = n_2 = 70$ und $n_3 = 140$

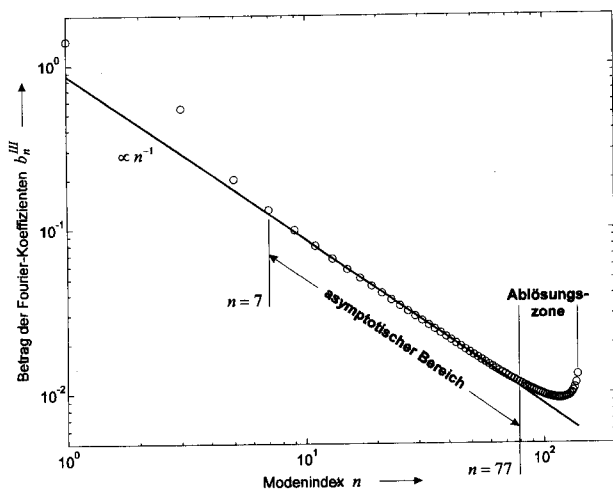


Bild 4: Darstellung der Beträge der Entwicklungskoeffizienten b_n^{III} für das Feldproblem aus Bild 3
 Der nach der Kantenbedingung asymptotische Bereich $b_n^{\text{III}} \propto n^{-1}$ wird nach etwa 55 % der insgesamt mitgenommenen Eigenwellen $n_3 = 140$ verlassen, weil die höheren Wellen noch nicht ausreichend konvergiert sind.

gibt. Dieser numerische Effekt hat seine Ursache im Abbruch der unendlichen Orthogonalreihen. Die Streumatrixelemente, die zu den hohen Modenordnungen gehören, zeigen nämlich aufgrund nicht berücksichtigter höherer Wellen noch keine ausreichende Konvergenz.

Die Zone der Ablösung vom asymptotischen Verlauf kann bei Mitnahme zusätzlicher Wellen in Richtung höherer Indizes n verschoben werden, ihr Auftreten ist aber grundsätzlich unvermeidlich. Umfangreiche numerische Studien ergaben, daß eine sichtbare Abweichung vom asymptotisch erwarteten Verlauf nach etwa 55 % der insgesamt mitgenommenen Eigenwellen erfolgt. Im Bild 4 beginnt diese Ablösung bei einem Modenindex von ca. $0,55 \cdot 140 = 77$. Die Entwicklungskoeffizienten der höheren Wellen bei abbrechenden Orthogonalreihen zeigen also noch nicht das nach der Kantenbedingung geforderte asymptotische Verhalten.

4.2 Stetigkeit der Feldanpassung

Wir haben gesehen, wie das Abschneiden von Orthogonalreihen bei höheren Wellentypen zu einer langsameren Konvergenz führt als bei niederen Wellentypen. Dieser Effekt tritt bei der betrachteten Hohlleiterverzweigung nach Bild 3 in jedem der drei Teilhohlleiter auf. Darum ist es von besonderer Bedeutung, seinen Einfluß

auf den stetigen Übergang der Felddarstellungen an den Raumteilgrenzen in der Trennfläche zu untersuchen.

4.2.1 Überprüfung durch Feldbilder

Eine graphische Möglichkeit, im Zeitbereich die Stetigkeit der Felder in der Trennfläche zu beurteilen, ist die Betrachtung von Feldlinienbildern im Längsschnitt der Hohlleiterstruktur. Bei alleiniger Anregung von H_{0n} -Rechteckhohlleiterwellen hat die elektrische Feldstärke ausschließlich eine E_x -Komponente, während die magnetische Feldstärke eine H_y und eine H_z -Komponente aufweist. Da die magnetischen Komponenten die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial H_y(y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial H_z(y, z, t)}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

erfüllen, wie man anhand von (1b) und (1c) leicht nachprüft, können sie als Höhenlinien einer skalaren Potentialfunktion dargestellt werden [13]. Diese Potentialfunktion ist aber gerade durch die elektrische Komponente $E_x(y, z, t) = \text{Re}\{E_x(y, z)e^{i\omega t}\}$ nach (1a) gegeben. In Bild 5 werden zwei magnetische Feldbilder in unmittelbarer Umgebung der Raumteilgrenzen miteinander verglichen. Für die Orthogonalentwicklung wurde im großen Raumteil III zunächst ein höchster Modenindex von $n_3 = 6$ und dann $n_3 = 140$ angesetzt. Bei ungenügender Anzahl der berücksichtigten Wellen ist die Stetigkeit der Felder an den Raumteilgrenzen nicht gewährleistet. Mit zunehmender Wellenzahl erhält man hingegen einen glatten Feldlinienverlauf. Aber auch bei Hinzunahme sehr vieler Wellen in den Orthogonalreihen besteht hinsichtlich des stetigen Feldübergangs noch ein weiteres Problem, das wir im folgenden Abschnitt besprechen wollen.

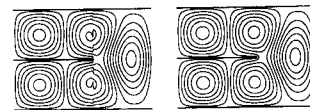


Bild 5: Magnetische Feldlinien des Gesamtfeldes, das sich für das Feldproblem aus Bild 3 einstellt
 Im linken Bild wurden im großen Raumteil nur $n_3 = 6$ Eigenwellen angesetzt, während rechts $n_3 = 140$ Eigenwellen mitgenommen wurden.

4.2.2 Gibbssches Phänomen

Aus der Theorie der Fourier-Reihen ist bekannt, daß in der Umgebung von Sprungstellen der zu entwickelnden Funktion stets wellenartige Überschwinger existieren, deren Amplitude mit zunehmender Anzahl N der Reihenterme nicht gegen Null konvergiert. Diese Erscheinung nennt man das Gibbssche Phänomen. Bei einer Rechteckfunktion schlägt z. B. der erste Überschwinger über das Rechteckdach um etwa 8,95 % der Sprunghöhe hinaus [1]. Aufgrund dieses Phänomens, das nicht nur auf klassische Fourier-Reihen beschränkt ist, ist der Güte der Approximation durch Orthogonalreihen bei Vorkommen von Sprungstellen eine Grenze gesetzt.

Bei der Feldanpassung in der Ebene $z = 0$ des Randwertproblems nach Bild 3 führt das Gibbssche Phänomen zu starken Oszillationen der Orthogonalreihen und darüber hinaus zu Unstetigkeiten an den Raumteilgrenzen. Das zeigt sich deutlich in Bild 6, wo der Betrag des Magnetfeldes innerhalb der Trennfläche bei $z = 0$ als Funktion von y/λ_0 dargestellt ist. Die eine Kurve stellt die Orthogonalreihen der Raumteile I und II für $z = 0$ und die andere die Orthogonalreihe des Raumteils III für $z = 0$, dar. Man erkennt unphysikalische Überschwinger, die mit zunehmender Entfernung von der Kante kleiner werden. Insbesondere sind beide Kurven keineswegs deckungsgleich, sondern zeigen auffällige Abweichun-

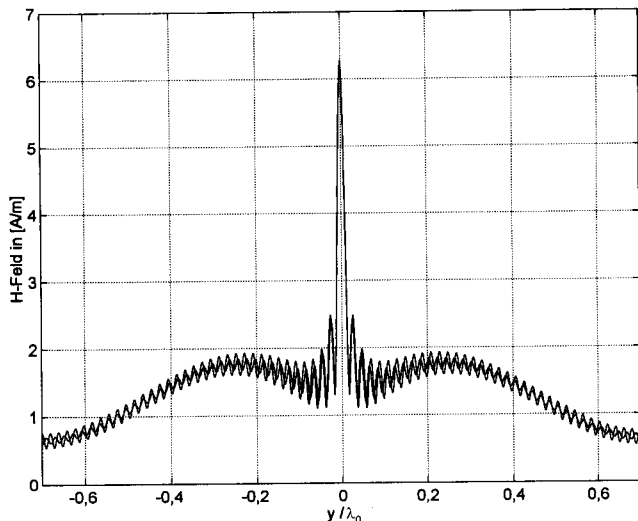


Bild 6: Betrag des Magnetfeldes

$$H(t=0) = \sqrt{|H_y|^2 \cos^2(\text{arc}H_y) + |H_z|^2 \cos^2(\text{arc}H_z)} \quad \text{links}$$

und rechts der Trennfläche bei $z = \pm 0$ als Funktion von y/λ_0
 Wegen der Gibbschen Überschinger, die mit zunehmender Entfernung von der Kante kleiner werden, kann keine stetige Feldanpassung erreicht werden.

gen voneinander. Die theoretisch vorhandene Singularität bei $y = 0$ kann numerisch natürlich nur ansatzweise nachgebildet werden; man erhält lediglich ein scharfes Maximum. Eine Möglichkeit zur Beseitigung des Gibbschen Phänomens und der Unstetigkeit innerhalb der Trennfläche wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

5. Wichtung von Orthogonalreihen

Die unphysikalischen, wellenartigen Überschinger, die in der Umgebung von Sprungstellen bei der numerischen Auswertung von Orthogonalreihen auftreten, werden im wesentlichen durch räumlich schnell variierende Feldanteile bestimmt. Eine schwächere Gewichtung der höheren Wellentypen muß daher zu einer starken Dämpfung dieser Oszillationen und zu einem glatteren Feldverlauf in der Trennfläche führen. Dazu betrachten wir folgende Analogie.

Ein Gleichstromschaltvorgang wird bekanntermaßen durch Tiefpaßfilterung verzerrt. Der ideale Tiefpaß mit rechteckiger Frequenzcharakteristik führt zu starken Überschwingern, während eine in Richtung höherer Frequenzen des Durchlaßbereichs gleichmäßig ansteigende Dämpfung eine Unterdrückung des Überschwingens bewirkt [7]. In [4] findet man zur Untersuchung dieses Sachverhalts einen umfangreichen Katalog von Tiefpaßfiltern zusammen mit deren jeweiligen Impulsantworten; ähnliche Beispiele enthält auch [16].

Es wird nun eine in Richtung zunehmender n abfallende Gewichtungsfunktion $w(n, N)$ eingeführt und anstelle z. B. der Orthogonalreihe (1a) für die numerische Auswertung folgende Reihenentwicklung bis zum jeweils N -ten Reihenterm mit $N = n_1, n_2, n_3$ benutzt:

$$\underline{E}_x^{\text{III}}(y, z) = -\sqrt{\frac{2}{ab_3}} \cdot \sum_{n=1}^{N=n_3} w(n, N) \sin[n\pi(y + b_3/2)b_3] \cdot \sqrt{Z_n^{\text{III}}} \cdot \left(b_n^{\text{III}} e^{-\gamma_n^{\text{III}} z} + a_n^{\text{III}} e^{\gamma_n^{\text{III}} z} \right) \quad (12)$$

Die Gewichte $w(n, N)$ werden auf die gleiche Weise in die Reihenentwicklungen sämtlicher Feldkomponenten in allen drei Raumteilen eingefügt. Unter vielen anderen Möglichkeiten wurde

Tabelle 4: Gewichtungsfunktionen $w(p)$ zum numerischen Dämpfen höherer Wellentypen mit $p(n, N) = (n-1)/(N-1)$ und $n = 1, 2, 3, \dots, N$. Die Funktionen (1) bis (4) sind in Bild 7 dargestellt.

| Fensterform | Gewichtungsfunktion |
|------------------------|--|
| (1) Rechteck-Wichtung | $w = 1$ |
| Dreieck-Wichtung | $w = 1 - p$ |
| (2) si -Wichtung | $w = \frac{\sin(p \cdot \pi)}{p \cdot \pi} = \text{si}(p \cdot \pi)$ |
| Hamming-Wichtung | $w = 0,54 + 0,46 \cdot \cos(p \cdot \pi)$ |
| (3) \cos^2 -Wichtung | $w = \cos^2\left(p \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0,50 + 0,50 \cdot \cos(p \cdot \pi)$ |
| (4) Blackman-Wichtung | $w = 0,42 + 0,50 \cdot \cos(p \cdot \pi) + 0,08 \cdot \cos(p \cdot 2\pi)$ |

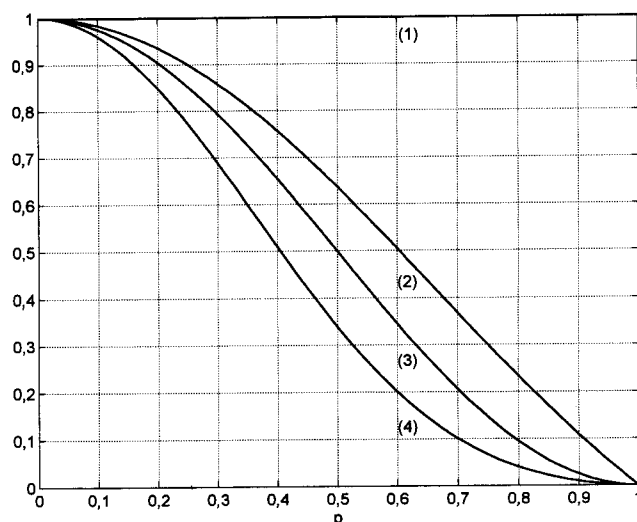


Bild 7: Gewichtungsfunktionen $w(p)$ nach Tabelle 4. Vom idealen Tiefpaß der Rechteck-Wichtung (1) über si-Wichtung (2), \cos^2 -Wichtung (3) zur Blackman-Wichtung (4) werden die höheren Wellen zur Milderung des Gibbschen Phänomens immer stärker bedämpft.

in dieser Arbeit das Verhalten der in **Tabelle 4** dargestellten Gewichtungsfunktionen untersucht. Der Verlauf der Funktionen (1) bis (4) wird in **Bild 7** verdeutlicht. Die Idee der Wichtung von Fourier-Reihen geht auf [2] und [8] zurück, wo bereits die Dreieck- und die si-Wichtung verwendet wurde.

Die Wirkung der spektralen Taperung, also des numerischen Dämpfens der höheren Wellentypen zeigt sich wieder anhand des Betrags des Magnetfeldes sehr deutlich in den **Bildern 8a** bis **8c**. Die Oszillationen von **Bild 6** und die daraus folgenden Unstetigkeiten sind verschwunden. Die ehemals scharfe Funktionsspitze, die numerisch die Kantensingularität nachbildet, ist hingegen flacher und niedriger geworden. Diesen Effekt muß man zur Erlangung eines stetigen Feldübergangs allerdings in Kauf nehmen. Von allen untersuchten Gewichtungsfunktionen der **Tabelle 4** zeigt die \cos^2 -Wichtung in **Bild 8b** das ausgewogenste Verhalten zwischen Dämpfung der Oszillationen und Herbeiführen der Stetigkeit einerseits und numerischer Nachbildung der Kantensingularität andererseits. Im **Bild 9** werden deswegen die geglätteten Kurven nach **Bild 8b** und die Magnetfelder der ungewichteten Reihen aus **Bild 6** nochmals gemeinsam dargestellt. Man erkennt deutlich das Oszillieren um die Ausgleichskurven nach **Bild 8b**, die die physikalische Realität wesentlich besser beschreiben als die ursprünglichen Orthogonalreihen ohne Wichtung.

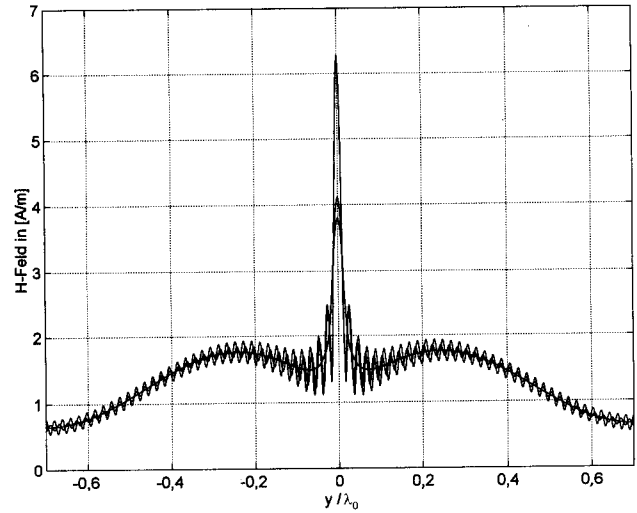
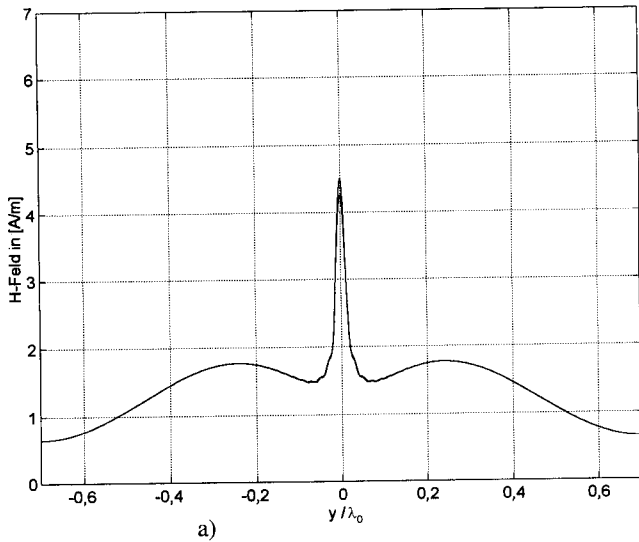


Bild 9: Gemeinsame Darstellung der durch \cos^2 -Wichtung geglätteten Kurven nach Bild 8b und der Magnetfelder der ursprünglich ungewichteten Reihen aus Bild 6

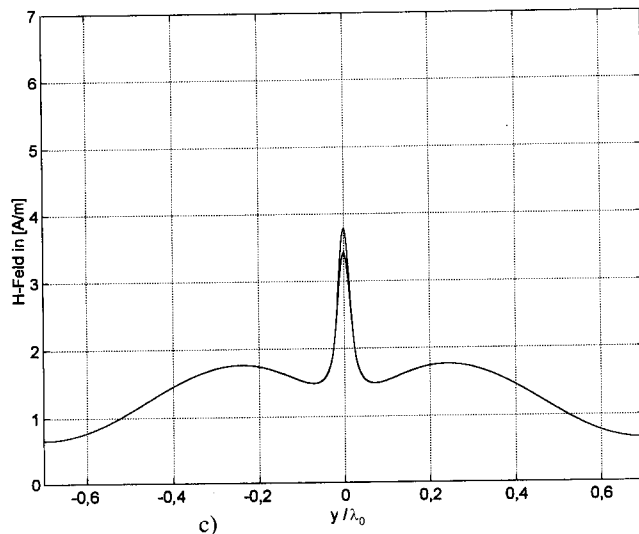
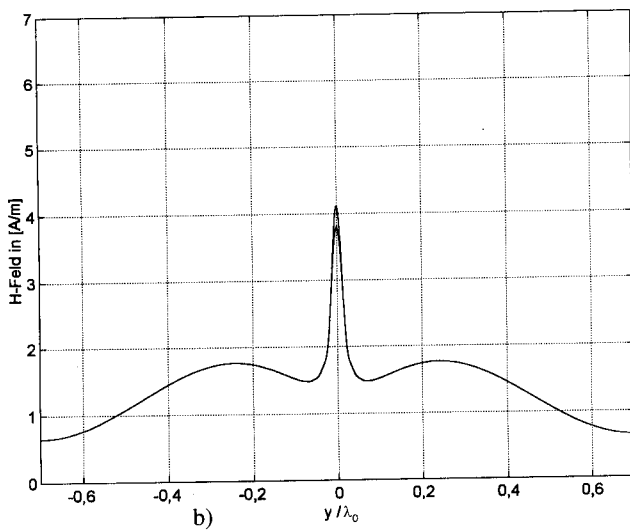


Bild 8: Im Vergleich mit Bild 6

- a) noch nicht ganz befriedigende Beseitigung des Gibbschen Phänomens durch si -Wichtung (2)
 b) ausgewogenes Verhalten zwischen Dämpfung der Oszillationen und numerischer Nachbildung der Kantensingularität durch \cos^2 -Wichtung (3)
 c) sehr gute Dämpfung der Oszillationen aber weniger gute numerische Nachbildung der Kantensingularität durch Blackman-Wichtung (4)

6. Zusammenfassung

Die Methode der Entwicklung nach orthogonalen Eigenfunktionen wird sehr erfolgreich zur Lösung kanonischer Beugungsprobleme eingesetzt. Trotz ihres mathematisch exakten Ansatzes können bei der numerischen Auswertung erhebliche Schwierigkeiten auftreten.

Die für eine gewünschte Genauigkeit notwendige Anzahl der mitzunehmenden Eigenwellen in den verschiedenen Raumteilen läßt sich durch Konvergenzuntersuchungen unter Berücksichtigung der Kantenbedingung noch relativ einfach ermitteln. Die unphysikalischen Gibbschen Überschwinger, die in der Nähe von Kantensingularitäten beobachtet werden, können im Rahmen der klassischen Orthogonalentwicklung durch bloßes Hinzunehmen weiterer höherer Wellen allerdings nicht beseitigt werden. Erst eine Erweiterung der Methode hin zu den gewichteten Orthogonalreihen vermeidet das Gibbsche Phänomen und liefert numerische Ergebnisse, die physikalisch sinnvoll sind. Die Auswahl einer geeigneten Wichtung bedeutet stets einen Kompromiß zwischen erwünschter Dämpfung der Überschwinger bei noch ausreichender Flankensteilheit der numerisch nachgebildeten Kantensingularität.

Die Gibbschen Oszillationen treten als numerisches Phänomen nur in einer engen Umgebung um die Sprungstelle bei $z = 0$ auf. Im Gesamtfeld in einiger Entfernung von der Trennfläche, das sich im wesentlichen nur aus den meist wenigen ausbreitungsfähigen Eigenwellen zusammensetzt, sind diese Phänomene nicht mehr feststellbar. Wenn ausschließlich dort die Felder gesucht sind, ist die Summation der ungewichteten Orthogonalreihen völlig ausreichend. Bei zunehmender Annäherung an die Trennfläche werden die Ergebnisse der klassischen Orthogonalentwicklung allerdings zweifelhaft. Das Verfahren kann aber durch eine schwächere Wichtung der höheren Wellentypen erfolgreich modifiziert werden und liefert dann wieder numerisch zuverlässige Ergebnisse.

Literatur

- [1] Arfken, G.: *Mathematical Methods for Physicists*. Boston: Academic Press, 3. Aufl., 1985.
- [2] Fejér, L.: Untersuchungen über Fouriersche Reihen. *Mat. Ann.* 58 (1904) S. 501-569.
- [3] Geisel, J.; Muth, K.-H.; Heinrich, W.: The Behavior of the Electromagnetic Field at Edges of Media with Finite Conductivity. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* MTT-40 (1992) 1, S. 158-161.
- [4] Harris, F.J.: On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform. *Proceedings of the IEEE* 66 (1978) 1, S. 51-83.

- [5] Henke, H.; Früchting, H.; Winz, R.: Irradiation in a Slotted Half Space and Diffraction by a Slit in a Thick Screen. Nachrichtentechnische Zeitschrift 29 (1976) 5, S. 401-405.
- [6] Hurd, R.A.: The Edge Condition in Electromagnetics. IEEE Transactions on Antennas and Propagation AP-24 (1976) 1, S. 70-73.
- [7] Küpfmüller, K.: Die Systemtheorie der elektrischen Nachrichtenübertragung. Stuttgart: Hirzel, 1974.
- [8] Lanczos, C.: Applied Analysis. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1956.
- [9] Lee, S.W.; Jones, W.R.; Campbell, J.J.: Convergence of Numerical Solutions of Iris-Type Discontinuity Problems. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques MTT-19 (1971) 6, S. 528-536.
- [10] Meixner, J.: The Behavior of Electromagnetic Fields at Edges. IEEE Transactions on Antennas and Propagation AP-20 (1972) 4, S. 442-446.
- [11] Mittra, R.: Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics. Berlin: Springer, 1975.
- [12] Mittra, R.; Lee, S.W.: Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves. New York: The Macmillan Company, 1971.
- [13] Müller, B.: Die Berechnung des elektromagnetischen Feldes um eine Empfangsantenne. Arch. Elektr. Übertr. A.E.Ü. 26 (1972) S. 73-79.
- [14] Piefke, G.: Feldtheorie III. B.I.-Hochschul Taschenbücher Bd. 782, Mannheim, 1977.
- [15] Reisdorf, F.: Die Zwischenmediums-Methode. Fortschr.-Ber. VDI, Reihe 9, Nr. 16. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1977.
- [16] Strauss, H.: Digitale Signalverarbeitung, Teil 8: FIR-Filter und Filtersynthese. ELRAD (1996) 7, S. 82-86.

Prof. Dr.-Ing. K. Kark
Fachhochschule Ravensburg-Weingarten
Institut für Nachrichtentechnik
Postfach 1261
D-88241 Weingarten.
E-mail: kark@fbe.fh-weingarten.de.

(Eingegangen am 22.3.1997)