

# Der schwach und uniform gekrümmte Toroidhohlleiter mit monotoner Taperung

von

K.W. Kark

DFVLR, Institut für Hochfrequenztechnik  
D-8031 Oberpfaffenhofen

## Zusammenfassung

Es wird das elektromagnetische Randwertproblem für verlustfreie, schwach inhomogene Hohlleiter mit kreisförmigem Querschnitt untersucht. Ausgehend vom kanonischen Problem des homogenen Rundhohlleiters wird der Einfluß von kleinen Änderungen des Querschnittsradius und einer schwachen Krümmung der Längsachse auf das stationäre Feldproblem bestimmt. Aufgrund des sich nur langsam ändernden Hohlleiterverlaufs können mit Hilfe einer verbesserten adiabatischen Modentheorie und einer Störungsrechnung nach Rayleigh und Schrödinger analytische Näherungslösungen der Feldgleichungen gefunden werden. Nach einer getrennten Betrachtung von Taper und Toroid ermöglicht schließlich die Superposition beider auftretenden Störeffekte die näherungsweise Berechnung eines toroidalen Tapers, für den hier erstmals eine Modalanalyse durchgeführt wird.

## Abstract

The electromagnetic boundary value problem is treated for loss-free, slightly inhomogeneous hollow waveguides with circular cross section. Starting from the canonical problem of the homogeneous circular cylinder the influence of small changes of the cross sectional radius and of a slightly bent longitudinal axis on the stationary field problem is investigated. Because the shape of the hollow waveguide changes only slowly, approximate analytical solutions of the field equations can be found applying an improved adiabatic mode theory and a perturbational approach of Rayleigh and Schrödinger. After a separate investigation of the tapered and the toroidal waveguide both appearing perturbation terms are superposed in order to determine the modal behaviour of a toroidal and tapered waveguide, which is considered here for the first time.

## 1. Einleitung

Hohlleiter mit kreisförmigem Querschnitt sind wichtige Bauelemente der Mikrowellentechnik. Sie werden vielfach für Radar-, Richtfunk- und Satellitenanwendungen eingesetzt. Neben dem kreiszylindrischen Hohlleiter gibt es eine Reihe weiterer Bauformen (siehe Bild 1). In dieser

Arbeit werden vier Strukturen solcher Art untersucht.

- Rundhohlleiter
- Rundhohlleiter-Taper
- Toroidhohlleiter
- toroidaler Taperhohlleiter

Rundhohlleiter-Taper werden als Anpassungsglieder zwischen Hohlleitern unterschiedlichen Durchmessers eingesetzt. Eine sprunghafte Erweiterung würde i.a. zu starken Reflexions- und Kopplungsverlusten für den einfallenden Wellentyp als Träger des Nachrichtensignals führen. Taperprofile weisen daher keine Knicke oder Sprünge der Randkurve auf. Es wird vielmehr ein sanfter und schwach inhomogener Übergang angestrebt. Toroidale Hohlleiter mit gekrümmter Längsachse treten u.a. als Antennenspeiseleitungen auf. Bei uniformer Krümmung kann man außerdem ringförmig geschlossene Strukturen erhalten. Sie dienen als Hohlraumresonatoren z.B. in der Plasmaphysik oder bei einer äußeren Anregung als Torusannten. Mit einem allgemeineren Längsschnittprofil kann man sich einen toroidalen Taper bzw. einen getaperten Toroid vorstellen, dessen Querschnittsradius sich langsam verändert und der eine uniform gekrümmte Längsachse besitzt.

Die Abweichungen der metallischen Randflächen von der kreiszylindrischen Form bewirken eine Störung der Wellenausbreitung. Für nicht zu starke Hohlleiterdeformation können Näherungslösungen der Maxwell'schen Gleichungen angegeben werden. Man geht dazu von den bekannten Eigenwellen des kanonischen homogenen Rundhohlleiters aus und berücksichtigt die auftretenden Modenkopplungen durch geeignet zu bestimmende Korrekturterme. Der störungstheoretische Zugang mit Hilfe einer modifizierten adiabatischen Modenrechnung liefert für die angesprochenen Hohlleiterformen einfache und kompakte Näherungslösungen der Feldgleichungen. Der analytische Aufwand ist zwar etwas höher als bei früheren Verfahren (siehe z.B. *Sporleder* und *Unger* [1]), jedoch erhält man kopplungsarme quasi-Eigenfunktionsdarstellungen, die sich für eine effiziente numerische Auswertung besonders eignen.

## 2. Der Kreiszylinder

### 2.1 Das Prinzip der kleinen Störungen

Stationäre elektromagnetische Felder als Lösungen elliptischer partieller Differentialgleichungen verhalten sich stetig gegenüber kleinen Störungen (Unger [2]). Bei zylindrischen Hohlleitern können solche Störungen z.B. in Form von kleinen Änderungen der metallischen Randflächen vorliegen. Störungen der Zylindersymmetrie sind u.a. Deformationen des Hohlleiterrandes, Krümmungen der Längsachse oder auch Variationen des Querschnittsradius im Längsschnitt. Man kann erwarten, daß sich die Feldverteilung einer geführten Welle im Inneren des kanonischen, kreiszylindrischen Hohlleiters, bei leichter Symmetriedeformation nur gering verändert. Darauf beruht die Anwendbarkeit von Störungs- und Variationsverfahren zur Bestimmung einer Approximation des sich einstellenden Feldes. Die resultierende Felddeformation verschwindet stetig bei Annäherung an die homogene Zylinderstruktur. Der kreiszylindrische Hohlleiter läßt sich somit als Grenzfall der inhomogenen Struktur ansehen. Aus diesem Grund kann man auch eine ungefähre Voraussage über das sich einstellende elektromagnetische Feld im gestörten Hohlleiter machen. Im wesentlichen besteht es aus dem dominanten Feld der homogenen Struktur, überlagert von Störanteilen, die dagegen nur "kleine" Werte annehmen.

In dieser Arbeit werden zwei Arten der angesprochenen Inhomogenitäten hinsichtlich ihres Einflusses auf die Feldverteilung geführter Hohlleiterwellen untersucht und zwar Radiusänderungen sowie Achskrümmungen. Sie werden zunächst getrennt und später kombiniert betrachtet. Es werden auf analytischem Wege geschlossene Ausdrücke für die Störterme hergeleitet, die eine approximative Beschreibung der Wellenausbreitung ermöglichen. Der Fehler, den man dabei begeht, wird umso kleiner, je schwächer die betrachtete Störung ist. Wächst die Feldstörung an, so werden die Ergebnisse der Störungstheorie immer unzuverlässiger.

### 2.2 Die ungestörten Feldlösungen

Im vorliegenden Kapitel werden die elektromagnetischen Feldgleichungen für den ungestörten homogenen Kreiszylinder gelöst. Die hier hergeleiteten Felder dienen dann im nächsten Schritt als Lösung nullter Ordnung für die nachfolgende störungstheoretische Behandlung des inhomogenen Hohlleiters.

Benutzt man das in Bild 1 dargestellte System der orthogonalen Kreiszylinderkoordinaten

$(\rho, \varphi, z)$ , so ist die als elektrisch ideal leitend angenommene Hohlleiterwand ( $\kappa \rightarrow \infty$ ) eine Koordinatenfläche. Der betrachtete Rundhohlleiter erstreckt sich nach beiden Seiten längs der z-Achse bis ins Unendliche und sei reflexionsfrei abgeschlossen. Dem äquivalent ist ein endlich ausgedehnter Hohlleiter mit idealen Einkopplern und idealen Absorbern an den Enden. Dadurch wird nur der Effekt der Wellenausbreitung im Kanal selbst untersucht und nicht etwa Reflexions- oder Beugungsphänomene an Speisepunkten, Abschlüssen oder dergleichen.

Die Maxwell'schen Gleichungen lauten in quellenfreien, linearen, isotropen und homogenen Gebieten bei harmonischer Zeitabhängigkeit ( $e^{j\omega t}$ )

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \varepsilon \vec{E} \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \quad (2)$$

Dabei werden die komplexen Phasoren  $\vec{H}$  und  $\vec{E}$  für eine zeitfreie Darstellung im Frequenzbereich benutzt.  $\varepsilon$  ist die Permittivität und  $\mu$  die Permeabilität der Hohlleiterfüllung. Die vektoriellen Maxwell'schen Gleichungen bilden ein gekoppeltes partielles Differentialgleichungssystem von 1. Ordnung. Geht man zu einer Darstellung in Komponenten über, so erhält man 6 gekoppelte skalare Differentialgleichungen. Eine analytische Lösung unter Erfüllung der Randbedingungen kann für beliebige Koordinatensysteme allgemein nicht angegeben werden. Das Dgl.-System (1) und (2) läßt sich mit Hilfe der Lorentz-Eichkonvention (siehe z.B. Jackson [3]) auf die skalare Helmholtz-Gleichung überführen.

$$(\Delta + k^2) A = 0 \quad (3)$$

$\vec{A} = A \vec{e}_z$  ist das Vektorpotential,  $k = \omega \sqrt{\mu\varepsilon}$  die Wellenzahl und  $\Delta$  der Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten.

$$\Delta = \frac{\partial}{\rho \partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\rho^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4)$$

Man findet zwei Arten entkoppelter Lösungen. Bei E-Wellen erfüllt das magnetische Vektorpotential  $A_E$  die Dirichlet-Randbedingung (Randwertproblem 1. Art)

$$A_E = 0 \quad |_{\rho=a} \quad (5)$$

und bei H-Wellen das elektrische Vektorpotential  $A_H$  die Neumann-Randbedingung (Randwertproblem 2. Art)

$$\frac{\partial A_H}{\partial \rho} = 0 \Big|_{\rho=a} \quad (6)$$

Aus den Vektorpotentialen gewinnt man die Eigenwellen des runden Hohlleiters vom E- bzw. H-Typ mit jeweils fünf Feldkomponenten.

$$\vec{H}_E = \nabla \times \vec{A}_E \quad (7)$$

$$\vec{E}_H = \nabla \times \vec{A}_H \quad (8)$$

Die Feldanteile  $\vec{E}_E$  bzw.  $\vec{H}_H$  lassen sich damit leicht aus den Gln. (1) und (2) errechnen. Kombiniert man eine E-Welle mit einer H-Welle, so erhält man ein allgemeines Wellenfeld mit sechs Feldkomponenten, eine sogenannte hybride EH- bzw. HE-Welle. Der erste Buchstabe soll den jeweils dominanten Modencharakter andeuten. Mit einem Bernoulli-Separationsansatz (der Index <sup>(0)</sup> bezieht sich auf den ungestörten homogenen Rundhohlleiter)

$$A^{(0)}(\rho, \varphi, z) = f_1^{(0)}(\rho) f_2^{(0)}(\varphi) f_3^{(0)}(z) \quad (9)$$

kann man die skalare Helmholtz-Gleichung (3) in drei gewöhnliche Differentialgleichungen überführen. Aus deren Lösungen ergibt sich die bekannte Form des Vektorpotentials im kreiszylindrischen Hohlleiter

$$A^{(0)}(\rho, \varphi, z) = J_m(K\rho) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm j k_z z} \quad (10)$$

Die geschweiften Klammern sollen eine beliebige Linearkombination der trigonometrischen Funktionen andeuten.  $J_m$  ist die Besselfunktion der ganzzahligen Ordnung  $m = 0, 1, 2, \dots$  und  $k_z$  die Ausbreitungskonstante der betrachteten Hohlleiterwelle. Eine Untersuchung der Randbedingungen (5) und (6) für E- bzw. H-Wellen führt auf die radialen Wellenzahlen  $K_E$  bzw.  $K_H$ :

$$K_E = j_{mn} / a \quad (11)$$

$$K_H = j_{mn}' / a \quad (12)$$

Der Index  $n = 1, 2, 3, \dots$  beschreibt die n-te Nullstelle der Besselfunktion  $J_m$  bzw. ihrer Ableitung  $J_m'$  nach deren Argument  $K\rho$ . Als Abkürzung, wobei alle Doppelindices der Einfachheit halber zu einem einzigen zusammengefaßt werden, führt man eine neue Eigenwert-Variablen  $\tau_v$  mit  $v = (m, n)$  ein.

$$\tau_v = \tau_{mn} = \begin{cases} j_{mn} & \text{bei } E_{mn} - \text{Wellen} \\ j_{mn}' & \text{bei } H_{mn} - \text{Wellen} \end{cases} \quad (13)$$

Damit folgt für die Ausbreitungskonstante  $k_z$ , bei der man der Einfachheit halber auf eine Indizierung mit  $v$  verzichtet,

$$k_z = \sqrt{k^2 - \tau_v^2 / a^2} \quad (14)$$

Ist der Radikand positiv, so erhält man ein reelles  $k_z$  und somit eine ausbreitungsfähige Welle. Höhere Moden mit großen Eigenwerten  $\tau_v$  können einen negativen Radikanden aufweisen. Es wird dann

$$k_z = \pm j \sqrt{\tau_v^2 / a^2 - k^2} \quad (15)$$

wobei dem Ansatz in Gl. (10) entsprechend auf die richtige Wahl des Vorzeichens zu achten ist, damit die Welle im Unendlichen abklingt. Wellen mit imaginärer Ausbreitungskonstante sind im Hohlleiter nicht ausbreitungsfähig. Sie werden beim Fortschreiten exponentiell gedämpft.

Die bei der Lösung der skalaren Helmholtz-Gleichung auftretenden Funktionen werden als Eigenfunktionen und die Separationskonstanten  $K_E$  bzw.  $K_H$  als Eigenwerte bezeichnet. Die Hohlleiterwelle, die sich aus diesen Funktionen zusammensetzt ist eine Eigenwelle der betrachteten Struktur. Eigenwellen, die man auch als Eigenmoden bezeichnet, sind linear unabhängig und koppeln nicht miteinander. Sie sind der Struktur auf natürliche Weise angepaßt und erfüllen sowohl die Maxwell'schen Gleichungen als auch die Randbedingungen exakt. Die Eigenfunktionen  $f_1^{(0)}$ ,  $f_2^{(0)}$  und  $f_3^{(0)}$  des Kreiszyllinders (siehe die Gln. (9) und (10)) bilden laut *Morse und Feshbach* [4] ein vollständiges Funktionensystem, nach dem man jede Feldverteilung im Hohlleiter entwickeln kann. Die Superposition von E- und H-Wellen gestattet dadurch die allgemeinste analytische Darstellung der Lösung der Maxwell'schen Gleichungen.

### 3. Der Taper

Einen einfachen Zugang zur approximativen Feldberechnung im Taper erhält man mit den adiabatischen Näherungsmethoden, die auf *Born und Oppenheimer* [5] zurückgehen. Adiabatische Moden sind lokale Eigenmoden der betrachteten Anordnung und passen sich als Näherungslösung der Feldgleichungen fließend durch Änderung ihres Querschnitteigenwertes  $K(z) = \tau_v / a(z)$  der veränderlichen Struktur an (*Arnold und Felsen* [6]). Die gegenseitige Verkopplung der adiabatischen Moden ist wegen dieses adaptiven Verhaltens gering. Für die Rechnungen kann die Randkurve des Tapers weitgehend frei gewählt werden, jedoch muß sie glatt und schwach veränderlich sein.

In dieser Arbeit werden die herkömmlichen adiabatischen Moden in zweifacher Weise modifiziert. Zur genaueren Erfüllung der skala-

ren Helmholtz-Gleichung wird für das Vektorpotential ein neuer Radialterm hergeleitet, und zur Verbesserung des Verhaltens am Hohlleiterrand wird die hybride Kopplung mit einer anderen Welle berücksichtigt. Im direkten Vergleich mit der homogenen Anordnung wird der Einfluß der Inhomogenität auf die Energiegeschwindigkeit diskutiert. Zur physikalischen Interpretation der Wellenausbreitung in inhomogenen Taper-Leitungen wird die Energiebeschleunigung als neue Größe eingeführt.

### 3.1 Teilseparation

Mangels eines der Struktur angepaßten separierbaren Koordinatensystems werden orthogonale Kreiszyylinderkoordinaten benutzt. Insbesondere soll nach einer Lösung der skalaren Helmholtz-Gleichung (3) für das Vektorpotential  $A$  gesucht werden. Da im inhomogenen Taperwellenleiter nach Bild 1 der Querschnittsradius  $a(z)$  mit der Längskoordinate  $z$  schwach variiert, kann man erwarten, daß eine vollständige Separation der Helmholtz-Gleichung in Zylinderkoordinaten nicht möglich sein wird. Tatsächlich kann man nur die azimutale Eigenfunktion  $f_2$  abspalten; Radial- und Longitudinalterm  $f_1$  und  $f_3$  bleiben miteinander verkoppelt. Dem Rechnung tragend benutzt man einen Ansatz zur Teilseparation der Helmholtz-Gleichung (vgl. Gl. (9))

$$A(\rho, \varphi, z) = f_1(\rho, z) f_2(\varphi) f_3(z) \quad (16)$$

wobei die longitudinale Eigenfunktion  $f_3(z)$  im Prinzip beliebig gewählt werden kann, weil die  $z$ -Abhängigkeit ja immer noch völlig allgemein im quasi-Radialterm  $f_1$  enthalten ist. Man wird aber für  $f_3$  eine sinnvolle Wahl treffen, so daß die resultierende Bestimmungsgleichung für die noch unbekannt Funktion  $f_1(\rho, z)$  möglichst einfach zu lösen sein wird. Mit dem Laplace-Operator (4) in Zylinderkoordinaten kann man wie beim homogenen Rundhohlleiter die azimutale Eigenfunktion  $f_2(\varphi) = f_2^{(0)}(\varphi)$  noch exakt abspalten (siehe Gl. (10)). Für die restlichen beiden Eigenfunktionen findet man folgende Bestimmungsgleichung.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} + K^2(z) - \frac{m^2}{\rho^2} \right) f_1 = -2 \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{df_3}{f_3 dz} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} - f_1 \left( \frac{d^2 f_3}{f_3 dz^2} + k_z^2(z) \right) \quad (17)$$

Die radiale Wellenzahl  $K$  (siehe Gl. (34)) und die Ausbreitungskonstante  $k_z$  seien wie im homogenen Rundhohlleiter über die Bedingung

$$k^2 = K^2(z) + k_z^2(z) \quad (18)$$

miteinander verknüpft. Die Dgl. (17) vereinfacht sich wesentlich, wenn man für die frei wählbare Funktion  $f_3$  die Erfüllung der selben Differentialgleichung wie im homogenen Fall fordert.

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + k_z^2(z) \right) f_3(z) = 0 \quad (19)$$

Im schwach veränderlichen Taper sind  $K(z)$  und  $k_z(z)$  schwach von der Längskoordinate  $z$  abhängende Funktionen. Somit kann man bei Beachtung von Gl. (19) annehmen, daß der quasi-Radialterm  $f_1(\rho, z)$  ebenfalls nur schwach von  $z$  abhängt. Macht man die vereinfachende Annahme ( $f_1$  sei dabei ungleich Null)

$$f_1 \gg \frac{\partial f_1}{\partial z} \gg \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} \quad (20)$$

so erhält man schließlich aus Gl. (17) unter Beachtung von Gl. (19) eine einfachere Bestimmungsgleichung für den quasi-Radialterm  $f_1$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} + K^2(z) - \frac{m^2}{\rho^2} \right) f_1(\rho, z) = -2 \frac{\partial f_1(\rho, z)}{\partial z} \frac{df_3(z)}{f_3(z) dz} \quad (21)$$

Gl. (19) kann näherungsweise mit Hilfe der WKBJ-Methode (*Felsen* und *Marcuvitz* [7]) gelöst werden. Von besonderer Bedeutung ist hierbei, ob die Ausbreitungskonstante  $k_z(z)$  im betrachteten  $z$ -Intervall des Tapers eine Nullstelle besitzt oder nicht. Eine Stelle  $z_c$  mit  $k_z(z_c) = 0$  heißt Übergangspunkt der Dgl. (19). In dieser Arbeit werden nur Übergangspunkte der Ordnung 1 betrachtet, d.h. hier besitzt die Ausbreitungskonstante eine einfache Nullstelle. Der Hohlleiterquerschnitt  $z_c$  definiert den cutoff-Querschnitt der betrachteten Welle. Die Welle wird am cutoff total reflektiert; dahinter wird sie exponentiell gedämpft. Im Falle, daß kein cutoff vorliegt, lautet die approximative WKBJ-Lösung der Dgl. (19):

$$f_3(z) = \frac{1}{\sqrt{k_z(z)}} \exp \left[ \pm j \int_{z_0}^z k_z(\tilde{z}) d\tilde{z} \right] \quad (22)$$

$z_0$  ist dabei eine beliebige Konstante. Betrachtet man dagegen einen Hohlleitermode, der an der Stelle  $z_c$  seinen cutoff-Querschnitt erreicht, so findet man (siehe *Langer* [8]) als approximative Darstellung für die Längseigenfunktion  $f_3$

$$f_3(z_<) = \frac{\Phi^{1/6}}{\sqrt{k_z}} \{C Ai(-\zeta) + D Bi(-\zeta)\} \quad (23)$$

$$f_3(z_>) = \frac{|\Phi|^{1/6}}{\sqrt{|k_z|}} \{C Ai(\zeta) + D Bi(\zeta)\}$$

$z_<$  bezeichnet eine Stelle vor dem cutoff und  $z_>$  eine dahinter.  $\Phi$  ist das sogenannte Phasenintegral

$$\Phi(z) = \int_z^{z_c} k_z(\tilde{z}) d\tilde{z} \quad (24)$$

Es gilt der Zusammenhang

$$\zeta = \left( \frac{3|\Phi|}{2} \right)^{2/3} \quad (25)$$

$Ai$  und  $Bi$  kennzeichnen die Airyschen Funktionen erster bzw. zweiter Art (Abramowitz und Stegun [9]).  $C$  und  $D$  sind beliebige Konstanten.

Nachdem die Längselgenfunktion  $f_3$  angenähert bestimmt wurde, kann man eine Näherungslösung von Gl. (21) mit Hilfe einer Picard-Iteration konstruieren (siehe Kark [10]). Der Radialterm des Vektorpotentials der Eigenwellen im homogenen Rundhohlleiter dient als Startwert und damit als Ausgangsnäherung nullter Ordnung

$$f_1^{(0)} = J_m(K(z)\rho) \quad (26)$$

Die erste iterierte  $f_1^{(1)}$  enthält bereits alle Korrekturterme von erster Ordnung  $O(a')$  mit  $a' = da/dz$ .

$$f_1^{(1)} = \exp \left[ Q \frac{dK}{K^3 dz} P \right] J_m(K\rho) \quad (27)$$

$Q$  und  $P$  sind Abkürzungen für die folgenden Ausdrücke:

$$Q(z) = \frac{df_3}{f_3 dz} \quad (28)$$

$$P(\rho, z) = m - \frac{(K\rho)^2}{2} - K\rho \frac{d(\ln J_m(K\rho))}{d(K\rho)} \quad (29)$$

Geht man nun mit dem so gebildeten Vektorpotential der modifizierten adiabatischen Moden (MAM)

$$A_{MAM} = f_1^{(1)}(\rho, z) f_2^{(0)}(\varphi) f_3(z) \quad (30)$$

in die skalare Helmholtz-Gleichung (3) hinein, so erhält man schließlich einen Einsetzfehler, der von 2. Ordnung klein ist.

$$(\Delta + k^2) A_{MAM} = O(a'', a'^2) \quad (31)$$

Mit dem Vektorpotential der gewöhnlichen adiabatischen Moden (AM) (siehe Arnold und Felsen [6])

$$A_{AM} = f_1^{(0)}(\rho) f_2^{(0)}(\varphi) f_3(z) \quad (32)$$

das die gleichen Querschnitteigenfunktionen wie der homogene Rundhohlleiter gleichen Querschnittes besitzt, hatte man noch einen wesentlich größeren Fehler (von 1. Ordnung) in Kauf nehmen müssen.

$$(\Delta + k^2) A_{AM} = O(a') \quad (33)$$

Die skalare Helmholtz-Gleichung kann somit durch den neuen verbesserten Radialterm (27) um eine Fehlerordnung besser erfüllt werden. Damit das neue Verfahren der modifizierten adiabatischen Moden auch in sich konsistent ist, müssen die Randbedingungen mit der selben Genauigkeit wie die Helmholtz-Gleichung erfüllt werden. Zur Erfüllung der Randbedingungen (5) und (6) im homogenen Rundhohlleiter wurden die radialen Wellenzahlen  $K_E$  und  $K_H$  wie in den Gln. (11) und (12) bestimmt. Ihre Werte werden analog auch für die Tapermoden benutzt. Hierin zeigt sich deutlich die adiabatische Anpassung an die veränderliche Struktur. Die Moden ändern ihre radiale Wellenzahl

$$K(z) = \frac{\tau_v}{a(z)} \quad (34)$$

derart, daß immer die gleiche Anzahl von radialen Nullstellen des Feldes in den jeweiligen Querschnitt hineinpaßt. Pierce [11] kennzeichnete diese Adaptionfähigkeit mit dem Prinzip von der Erhaltung der Modenindices  $\nu$ . Das Feldbild wird beim Fortschreiten in  $z$ -Richtung verzerrungsfrei gestaucht oder gedehnt, so daß es immer in den jeweiligen Querschnitt hineinpaßt. Mit dieser Näherung können allerdings die Randbedingungen nicht mehr erfüllt werden. Eine näherungsweise Erfüllung der Randbedingungen kann jedoch durch die Kombination einer E- mit einer H-Welle zu einem hybriden gekoppelten Modenpaar erreicht werden.

### 3.2 Gekoppelte Modenpaare

Im allgemeinen Rundhohlleiter-Taper sind mangels eines konformen, separierbaren Koordinatensystems keine exakten Eigenwellen mit jeweils nur fünf Feldkomponenten bekannt. Mit Ausnahme einiger spezieller Formen der Hohlleiterrandkurve  $a(z)$  (hyperbolisches Profil, lineare Taperung) kann keine exakte Feldlösung angegeben werden.

Zur Darstellung der adiabatischen Moden werden in dieser Arbeit kreiszylindrische Koordi-

naten benutzt, die der Tapergeometrie nur unvollkommen angepaßt sind. Die so konstruierten Moden werden daher zwangsweise über die Randbedingungen miteinander verkoppelt. Die näherungsweise Erfüllung der Randbedingungen mittels eines gekoppelten Hybridpaares geschieht dadurch, daß sich bei Wahl eines geeigneten Koppelkoeffizienten  $\gamma(z)$  unerwünschte Feldkomponenten der E- und H-Welle gegenseitig in 1. Ordnung  $O(a')$  aufheben. Damit dies im gesamten Taperintervall gleichermaßen möglich ist, muß einerseits der Koppelkoeffizient eine schwach variable Funktion von  $z$  sein, und andererseits müssen sich die beiden verkoppelten Moden gleich schnell ausbreiten, d.h. sie dürfen nicht außer Phase laufen. Damit erhalten beide verkoppelten Moden die gleiche Ausbreitungskonstante  $k_z(z)$  und die gleiche radiale Wellenzahl  $K(z) = \tau_v / a(z)$ .

Das hybride Wellenpaar vom  $EH_v$ - bzw.  $HE_v$ -Typ reduziert sich im homogenen Grenzfall (bei  $a' = 0$ ) auf die gewöhnliche  $E_v$ - bzw.  $H_v$ -Welle des geraden Kreiszyllinders. Der Koppelkoeffizient  $\gamma$  muß dann verschwinden. Man kann für ein hybrides Wellenpaar einen ortsabhängigen Koppelkoeffizienten  $\gamma(z)$  errechnen, mit dem eine approximative Erfüllung der Randbedingungen möglich wird (Kark [10,22]).

$$\gamma(z) = - \frac{j k a(z) a'(z) m}{\tau_v^2} \quad (35)$$

Im Kegelhorn mit konstanter Randsteigung  $a'$  erkennt man, daß bei größer werdender Radialabmessung  $ka$  das Wellenpaar stärker gekoppelt ist. Die stärkste Paarverkopplung erfahren die niedrigen Moden mit kleinen Eigenwerten  $\tau_v$ . Der Spezialfall  $m = 0$  sei ausgeschlossen. Einen typischen Verlauf des Betrags des Koppelkoeffizienten  $|\gamma(z)|$  innerhalb des  $EH_{11}$ -Hybridpaares für eine Schar exponentieller Taper im Bereich  $0 \leq kz \leq 10$  mit

$$ka(kz) = 6 - \left(1 - \frac{kz}{10}\right)^\alpha \exp\left(\alpha \frac{kz}{10}\right) \quad (36)$$

zeigt Bild 2. Der Scharparameter  $\alpha$  nimmt dort die Werte  $\alpha = 1.1, 2, 4, 7, 11, 16, 22$  an. Der Pfeil deutet die Richtung zunehmenden Scharparameters an. Der Wert  $\alpha = 1$  stellt einen entarteten Sonderfall dar. Er ermöglicht keinen knickfreien Übergang. Stattdessen wurde  $\alpha = 1.1$  in die Schar mit aufgenommen.

Während der Fehler beim Erfüllen der Randbedingungen durch die Paarverkopplung auf einen Wert von 2. Ordnung  $O(a'', a'^2)$  verkleinert werden konnte, so war er ohne Berücksichtigung der Koppelkorrektur noch von 1. Ordnung  $O(a')$ .

Damit wurde in konsistenter Weise sowohl bei der Helmholtz-Gleichung als auch den Randbedingungen die gleiche Fehlerordnung erreicht.

Modifizierte adiabatische Moden unterscheiden sich von den gewöhnlichen adiabatischen Moden durch ihren korrigierten quasi-Radialterm  $f_1^{(1)}$  (siehe Gl. (27)) und die Verkopplung zu hybriden Modenpaaren. Der Genauigkeitsgewinn durch diese Modifikationen wurde im Fall des konischen Lineartapers (Kegelhorn) untersucht. Die Eigenfunktionen des Kegelhorns können in einer Kugelwellendarstellung noch exakt angegeben werden. Ein Vergleich zwischen der gewöhnlichen adiabatischen Modenlösung (AM ohne Paarverkopplung), die noch den einfachen Radialterm  $f_1^{(0)}$  benutzt, mit der modifizierten Lösung  $f_1^{(1)}$  (MAM mit Paarverkopplung) zeigt eine mittlere Verkleinerung der Abweichung von der exakten Kugelwellenlösung um etwa 50%. Die neue MAM-Methode liefert somit eine genauere Felddarstellung als die ältere AM-Theorie bei der approximativen Analyse inhomogener Wellenleiterverbindungen.

### 3.3 Der Energiefluß

Zum besseren Verständnis der Wellenausbreitung in inhomogenen Taperleitungen wird nun die mittlere Strömungsgeschwindigkeit der Energie eines Hybridmodenpaares untersucht. Die Definition der Energiegeschwindigkeit nach Borgnis [12]

$$v_E = \frac{N}{W} = \frac{\frac{1}{2} \int_F \operatorname{Re} \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \} \cdot \vec{e}_z dF}{\frac{\epsilon}{4} \int_F (|E|^2 + Z^2 |H|^2) dF} \quad (37)$$

erfordert eine Berechnung des zeitgemittelten Energieflusses  $N$  und des Energiebelags  $W$ .  $F$  ist die kreisförmige Querschnittsfläche des Hohlleiters. Für modifizierte adiabatische Moden erhält man daraus nach einiger Rechnung (Kark [10])

$$v_E(z) = \frac{k_z(z)}{k} c \quad (38)$$

mit der Lichtgeschwindigkeit  $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ . Wegen der variablen Ausbreitungskonstante  $k_z(z)$  ist nun auch die Energiegeschwindigkeit eine Funktion der Längskoordinate  $z$  geworden. Läuft eine Welle in Richtung größerer radialer Abmessungen, so wächst ihre Energiegeschwindigkeit nach Gl. (38) an (beachte Gl. (14)). Im Grenzfall einer unendlich fernen Hohlleiterwand erhält man quasi Freiraumbedingungen ( $k_z \rightarrow k$ ), und die Welle breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit  $v_E = c$  des betreffenden Mediums

aus. Bei Wellenausbreitung in einen sich monoton verengenden Hohlleiter hinein nimmt die Energiegeschwindigkeit proportional zur Ausbreitungskonstante ab. Im Grenzfall kann man daraus schließen, daß der Energiefluß am cutoff ( $k_z = 0$ ) zum Stillstand kommt, sich umkehrt und die Welle total reflektiert zurück läuft, wobei sie wieder beschleunigt wird. In dieser Arbeit wird erstmals der Begriff der mittleren Energiebeschleunigung  $b_E$  definiert.

$$b_E = v_E \frac{dv_E}{dz} = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} v_E^2 \quad (39)$$

Im Falle des Rundhohlleiter-Tapers erhält man mit  $v_E$  aus Gl. (38):

$$b_E(z) = k_z' k_z \left( \frac{c}{k} \right)^2 \quad (40)$$

Bei sich verengendem Kanal gilt  $k_z' < 0$  und die Beschleunigung ist eigentlich eine Wellenverzögerung. Bei Annäherung an den cutoff wird die Welle abgebremst bis sie zum Stillstand kommt und nach Totalreflexion wieder beschleunigt zurückläuft. Der Taper wirkt als Anpassungsglied zwischen zwei homogenen Raumteilen mit jeweils anderer Energiegeschwindigkeit. Er beschleunigt oder bremst den einfallenden Mode bis er die angepaßte Energiegeschwindigkeit des anschließenden Hohlleiters erreicht. Somit kann man eine getaperte Leitung auch als Energiegeschwindigkeitstransformator bezeichnen.

#### 4. Der Toroid

Als zweiter Themenkreis neben dem Rundhohlleiter-Taper wird in dieser Arbeit der schwach und uniform gekrümmte Toroidhohlleiter untersucht. Man kann ihn sich aus einem homogenen Rundhohlleiter entstanden denken, dessen Achse nicht geradlinig sondern schwach gekrümmt verläuft. Die Symmetriedeformation wird als Störung der homogenen Anordnung angesehen und mit Hilfe der Rayleigh-Schrödinger Störungstheorie (Schrödinger [13]) werden Korrekturen zum ungestörten Feld berechnet.

Toroidale Strukturen wurden seit Jouguet [14] für verschiedene Zwecke immer wieder untersucht. Der klassischen Anwendung als Wellenleiterbaustein zur Nachrichtenübertragung steht in neuerer Zeit die Verwendung als ringförmig geschlossener Resonator in der Plasmaphysik gegenüber. Torusstrukturen führen immer auf nicht separierbare Differentialgleichungen (mit Ausnahme der Laplace-Gleichung für den statischen Grenzfall). So ist man zur Lösung auf Näherungsmethoden angewiesen. Jouguet [14]

und Lewin [15] befaßten sich mit dem Toroidhohlleiter, während Brambilla [16], Cap [17], Lileg [18] und Schupfer [19] den geschlossenen Torusresonator untersuchten. Weston [20] betrachtete die Streuung elektromagnetischer Wellen an einem Torus.

In dieser Arbeit wird erstmals der Formalismus der Störungstheorie nach Rayleigh und Schrödinger auf den Toroidhohlleiter angewandt. Die Felddarstellung geschieht hier nicht über die Vektorpotentiale wie beim Rundhohlleiter-Taper, sondern es werden Lösungen für die longitudinalen Feldkomponenten hergeleitet, womit über die Maxwell'schen Gleichungen auch die Transversalfelder festgelegt sind. Die skalarisierten Gleichungen der Längsfeldstärken können mit Hilfe einer bikomplexen Transformation entkoppelt und damit entscheidend vereinfacht werden. Im Gegensatz zum Torusresonator existieren im Toroidhohlleiter keine toroidal unifornen Moden, die nicht von der Umfangskordinate  $\alpha$  bzw.  $s$  (siehe Bild 3) abhängen und nur drei Feldkomponenten besitzen. Bei der Berechnung des Torusresonators beschränkte man sich bisher überwiegend auf diesen einfacheren Spezialfall, da hier die E-Wellen von den H-Wellen entkoppelt sind. Im Toroidhohlleiter gibt es dagegen nur Hybridfelder mit jeweils sechs Feldkomponenten.

In einer Störungsrechnung 1. Ordnung werden alle Eigenfunktionen mitsamt den zugehörigen Ausbreitungskonstanten der EH- und HE-Hybridwellen bestimmt. Für die unendlichen Reihen der Störterme in den Eigenfunktionen können exakte, geschlossene Ausdrücke angegeben werden. Es wird erstmals das gesamte Modenspektrum aller EH- bzw. HE-Wellen untersucht. Physikalisch anschauliche Darstellungen der transversalen Feldlinien innerhalb der gestörten Struktur sowie Untersuchungen des longitudinalen Energieflusses schließen sich an. Für die  $H_{11}$ -Grundwelle werden im Vergleich mit dem geraden Kreiszyylinder die transversalen Feldlinien und die räumliche Verteilung der zeitgemittelten Energieströmung graphisch dargestellt.

##### 4.1 Die gestörte Helmholtz-Gleichung

Die Maxwell'schen Gleichungen in lokalen Toruskoordinaten ( $\xi, \varphi, \alpha$ ) (siehe Bild 3 mit dem normierten Radius  $\xi = \rho / a$  und  $0 \leq \xi \leq 1$ ) können bei uniformer und ebener Krümmung der toroidalen Längsachse auf ein gekoppeltes Paar partieller Differentialgleichungen von 2. Ordnung für die longitudinalen Feldkomponenten  $E_z$  und  $H_z$  reduziert werden (Brambilla und Finzi [16]).

$$(\Delta_t + \lambda)E = \delta (L_1 E + L_2 ZH) \quad (41)$$

$$(\Delta_t + \lambda)ZH = \delta (-L_2 E + L_1 ZH) \quad (42)$$

Hierzu werden die Abkürzungen  $E = hE_x$  und  $H = hH_x$  eingeführt.  $h(\xi, \varphi) = 1 - \delta \xi \cos \varphi$  ist dabei der toroidale Metrikkoeffizient, und  $\delta = a/R$  ist das inverse Aspektverhältnis.  $a$  ist der kleine und  $R$  der große Torusradius, weswegen aus geometrischen Gründen immer  $0 \leq \delta \leq 1$  gilt. Zur Dimensionsbefreiung wurde der Feldwellenwiderstand des freien Raumes  $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$  benutzt.  $\Delta_t$  ist der transversale Laplace-Operator und  $L_1$  sowie  $L_2$  sind Störoperatoren von 1. Ordnung.

$$\Delta_t = \frac{\partial}{\xi \partial \xi} \left( \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2}{\xi^2 \partial \varphi^2} \quad (43)$$

$$L_1 = \frac{1 + \gamma^2}{h(1 - \gamma^2)} \left( \frac{\sin \varphi}{\xi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \quad (44)$$

$$L_2 = \frac{-2\gamma}{h(1 - \gamma^2)} \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\cos \varphi}{\xi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad (45)$$

Dabei wurde die dimensionslose Größe  $\gamma$  eingeführt, die über den Metrikkoeffizienten  $h$  von den transversalen Koordinaten  $\xi$  und  $\varphi$  abhängt.

$$\gamma = \frac{\beta}{k h(\xi, \varphi)} \quad (46)$$

Der Parameter  $\lambda = (ka)^2(1 - \gamma^2)$  hängt über  $\gamma$  von der bislang noch unbekanntem Ausbreitungskonstante  $\beta$  ab, die als Eigenwert der Dgl. (48) betrachtet werden kann. Alle Feldkomponenten haben die longitudinale Abhängigkeit  $e^{i(\omega t - \beta z)}$  mit der toroidalen Bogenlänge  $s = R\alpha$ . Mit Hilfe der bikomplexen Transformation

$$F = E + iZH \quad (47)$$

gelingt eine elegante Entkopplung der Gln. (41) und (42), und man erhält eine gestörte homogene Helmholtz-Gleichung mit den zugehörigen Randbedingungen (Kark [10]).

$$(\Delta_t + \lambda)F = \delta LF \quad (48)$$

$$E_x|_{\xi=1} = 0 \quad \left. \frac{\partial H_x}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0 \quad (49)$$

$L = L_1 - iL_2$  ist ein komplexer Störoperator von 1. Ordnung. Die  $i$ -komplexe Ebene, die in Gl. (47) eingeführt wurde, muß streng von der  $j$ -komplexen Ebene getrennt werden, die bereits für eine elegantere Beschreibung der Zeitabhängigkeit ( $\cos \omega t \rightarrow e^{i\omega t}$ ) mittels  $j$ -komplexer

Phasoren benutzt wird. Es gilt stets  $i^2 = j^2 = -1$  aber  $ij \neq -1$ . Das Rechnen mit zwei komplexen Ebenen ist eng verwandt mit dem Quaternionenkalkül der Spinoralgebra (Birkhoff und Mac Lane [21]). Mit der Quaternionenschreibweise ließe sich zwar die bikomplexe Darstellung noch weiter formalisieren; eine konsequente Unterscheidung der beiden imaginären Einheiten  $i$  und  $j$  genügt aber für die Zwecke dieser Arbeit vollauf.

## 4.2 Störungsrechnung

Die Grundidee zur Lösung der nicht separierbaren Helmholtz-Gleichung (48) ist es, die Krümmung der Längsachse des Toroidhohlleiters als Störung der Symmetrie des homogenen Rundhohlleiters mit gerader Achse anzusehen. Die Eigenwerte und Eigenfunktionen im Toroid müssen sich bei wachsender Störung ( $\delta > 0$ ) stetig aus den Lösungen  $F^{(0)}$  und  $\beta^{(0)}$  der ungestörten Differentialgleichung mit ( $\delta = 0$ ) ergeben. Man beachte dabei, daß Gl. (48) noch völlig exakt für beliebige Werte des inversen Aspektverhältnisses  $\delta$  mit  $0 \leq \delta \leq 1$  gilt. Somit können die gestörten Eigenfunktionen als Entwicklung nach Potenzen des inversen Aspektverhältnisses  $\delta = a/R$  dargestellt werden. Die Entwicklungskoeffizienten sind Linearkombinationen der ungestörten Eigenwellen des geraden Kreiszyinders. In dieser Arbeit sollen nur Toroidhohlleiter mit schwacher Krümmung ( $0 \leq \delta \ll 1$ ) betrachtet werden, so daß die gesuchten Entwicklungen schon nach dem linearen Term  $\delta$  abgebrochen werden dürfen. Damit macht man einen Störungsansatz erster Ordnung für die bikomplexe Feldfunktion  $F_v$  und die Ausbreitungskonstante  $\beta_v$ .

$$F_v = F_v^{(0)} + \delta F_v^{(1)} \quad (50)$$

$$\beta_v = \beta_v^{(0)} + \delta \beta_v^{(1)} \quad (51)$$

Hier werden wieder alle Doppelindices ( $m, n$ ) zu einem einzigen ( $v$ ) zusammengezogen. Der Störterm  $F_v^{(1)}$  wird nach den ungestörten Eigenfunktionen  $F_\mu^{(0)}$  mit bislang noch unbekanntem Entwicklungskoeffizienten  $c_{v\mu}$  entwickelt.

$$F_v^{(1)} = \sum_{\mu} c_{v\mu} F_\mu^{(0)} \quad (52)$$

Mit diesem Ansatz geht man in Gl. (48) und vernachlässigt alle Terme von 2. Ordnung  $O(\delta^2)$ . Unter Ausnutzung der Orthogonalitätseigenschaften der ungestörten Lösungen  $F_\mu^{(0)}$  kann man die Entwicklungskoeffizienten  $c_{v\mu}$  bestimmen, und man erhält die unendlichen Störreihen (52), die mit Hilfe des Residuensatzes der Funktionentheorie in geschlossene Ausdrücke



übergeführt werden können. Die daraus resultierenden expliziten Störterme findet man bei Kark [10]. Man beachte dabei, daß zur Bestimmung der Störung einer  $E_{1n}$ - bzw.  $H_{0n}$ -Welle, die im homogenen Rundhohlleiter miteinander entartet sind, ein etwas anderer Störungsansatz zu machen ist. Durch die Krümmung der Längsachse wird die Entartung der beiden Modentypen aufgehoben (Kark [23]).

### 4.3 Feldverdrängung

Zum besseren Verständnis der Wellenausbreitung in toroidalen Hohlleitern werden einige Darstellungen der gestörten Feldverteilungen mit den Feldern des geraden Kreiszyllinders verglichen. Die elektrischen Feldlinien in einem transversalen Querschnitt sind im Bild 4 für die  $H_{11}$ -Grundwelle gezeigt, während die transversale Verteilung der longitudinalen Komponente des Poyntingschen Vektors

$$P_{\alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \} \cdot \vec{e}_{\alpha} \quad (53)$$

in Bild 5 dargestellt wird. Die Intensität im Energiefluß nimmt von weiß bis schwarz linear quantisiert zu. Beide Diagramme zeigen eine bemerkenswerte Verschiebung sowohl der Feldlinien als auch der Energieströmung in den äußeren Querschnittsbereich weg vom Krümmungsmittelpunkt des Toroids, der jeweils auf der rechten Seite der Bilder liegt. Es fällt eine Erhöhung der zeitgemittelten Energiestromdichte  $P_{\alpha}$  im äußeren Querschnittsbereich auf, während innen eine Abschwächung festgestellt werden kann. Dies führt im Toroidhohlleiter zu einer unsymmetrischen Energieströmung. Insgesamt wurden die niedrigsten fünf Rundhohlleitermoden auf ihr gestörtes Verhalten im Toroidhohlleiter untersucht, wobei stets der gleiche Effekt beobachtet werden konnte (Kark [10]).

### 5. Der toroidale Taper

Als Verallgemeinerung wird schließlich eine kombinierte Struktur betrachtet, in der beide Störungen der Rundhohlleiter-Symmetrie gemeinsam auftreten. Der toroidale Taper (getaperte Toroid) besitzt eine uniform und schwach gekrümmte Längsachse und einen sich langsam erweiternden (bzw. verengenden) Kreisquerschnitt (siehe Bild 1). Ein solcher inhomogener Hohlleiter ist in der Literatur bisher mit analytischen Näherungsverfahren noch nicht untersucht worden. Nach der getrennten Untersuchung beider Symmetriestörungen führt eine lineare Superposition der Feldlösungen für Taper und Toroid zu einer approximativen Beschreibung der Wellenausbreitung in dem neu-

en Hohlleitertyp (Kark [10]). Es wird das lokale Toruskoordinatensystem  $(\xi, \varphi, s)$  benutzt. Für eine Näherungsrechnung erster Ordnung können die Korrekturterme, die vom sich ändernden Radius  $O(a')$  herrühren, und jene, die durch die gekrümmte Längsachse  $O(\delta)$  angeregt werden, separat berechnet werden. Im nächsten Schritt überlagert man sie linear. Ein hybrider Koppelterm, der sich als klein von 2. Ordnung  $O(a'^2, a'', \delta^2, a'\delta)$  erweist, kann vernachlässigt werden, vorausgesetzt die geometrische Symmetriestörung bleibt auch wirklich klein.

Die Kombination der adiabatischen Rechnungen mit der Störungstheorie ermöglicht erstmals einen analytischen Zugang zur mathematischen Untersuchung dieses neuartigen Hohlleitertyps. Durch die lineare Superposition der beiden Inhomogenitäten ergeben sich insbesondere die gleichen Phänomene der Energiebeschleunigung und Feldverdrängung wie beim Taper bzw. Toroid selbst.

### 6. Zusammenfassung und Ausblick

Es wird das elektromagnetische Randwertproblem für verlustfreie Hohlleiter mit kreisförmigem Querschnitt untersucht. Die Eigenwellen des kanonischen homogenen Kreiszyllinders können durch eine Separation der skalaren Helmholtz-Gleichung noch exakt angegeben werden. Wird dagegen die Form der metallischen Randflächen nur geringfügig abgeändert, so kann man i.a. schon keine analytisch exakte Feldlösung mehr finden.

In dieser Arbeit werden inhomogene Hohlleiter betrachtet, die man als gestörte Rundhohlleiter ansehen kann. Es wird der Einfluß von kleinen Änderungen des Querschnittsradius ( $\rightarrow$  Rundhohlleiter-Taper) und einer schwachen Krümmung der Längsachse ( $\rightarrow$  Toroidhohlleiter) auf das stationäre Feldproblem bestimmt. Zunächst werden beide Störungen getrennt betrachtet und danach im hier erstmals untersuchten Fall des toroidalen Taperhohlleiter überlagert. Strukturen dieser Art mit geringer Modenkonzersion findet man u.a. in der Hohlleiterschaltungstechnik als schwach inhomogener Übergang zwischen zwei homogenen Raumteilen oder als Speiseleitung einer Mikrowellenantenne.

Aufgrund des sich nur langsam ändernden Hohlleiterverlaufs können, ausgehend von den Eigenwellen des Rundhohlleiters, verschiedene mathematische Näherungsverfahren verwendet werden. Im Taper benutzt man eine verbesserte adiabatische Modentheorie, während für den Toroid eine Störungsrechnung nach Rayleigh

und Schrödinger bevorzugt wird. Alle dadurch hergeleiteten Korrekturterme werden als geschlossene Ausdrücke angegeben. Im toroidalen Taper wird eine lineare Superposition der Feldlösungen für Taper bzw. Toroid durchgeführt.

Als Verallgemeinerung der bestehenden Theorie könnten einige andere geometrische Störungen der Zylindersymmetrie ebenfalls berücksichtigt werden. Man könnte eine ungleichförmige Achskrümmung, Ondulierungen oder Torsion betrachten. Genauso wäre die Untersuchung von inhomogenen Hohlleitern mit Impedanzrandbedingungen oder auch mit Plasmafüllung von besonderem Interesse.

## 7. Schrifttum

- [1] *Sporleder, F.; Unger, H.-G.*: Waveguide Tapers Transitions and Couplers. P. Peregrinus, Stevenage (1979).
- [2] *Unger, H.-G.*: Elektromagnetische Theorie für die Hochfrequenztechnik II. Hüthig, Heidelberg (1981).
- [3] *Jackson, J.D.*: Klassische Elektrodynamik. De Gruyter, Berlin/New York (1983).
- [4] *Morse, P.M.; Feshbach, H.*: Methods of Theoretical Physics. Part I. McGraw-Hill, New York (1953).
- [5] *Born, M.; Oppenheimer, R.*: Zur Quantentheorie der Molekeln. Ann. d. Phys., 84 (1927), 457-484.
- [6] *Arnold, J.M.; Felsen, L.B.*: Ray Invariants, Plane Wave Spectra and Adiabatic Modes for Tapered Dielectric Waveguides. Radio Science, 19 (1984), 1256-1264.
- [7] *Felsen, L.B.; Marcuvitz, N.*: Radiation and Scattering of Waves. Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1973).
- [8] *Langer, R.E.*: On the Connection Formulas and the Solutions of the Wave Equation. Phys. Rev., 51 (1937), 669-676.
- [9] *Abramowitz, M.; Stegun, I.A.*: Handbook of Mathematical Functions. Dover, New York (1972).
- [10] *Kark, K.W.*: Theoretische Untersuchungen zur Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in schwach inhomogenen Hohlleitern. Forschungsbericht der Deutschen Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt, DFVLR-FB 87-23 (1987).
- [11] *Pierce, A.D.*: Extension of the Method of Normal Modes to Sound Propagation in an Almost-Stratified Medium. J. Acoust. Soc. Am., 37 (1965), 19-27.
- [12] *Borgnis, F.*: Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Energie monochromatischer elektromagnetischer Wellen in dielektrischen Medien. Zs. f. Phys., 117 (1941), 642-650.
- [13] *Schrödinger, E.*: Quantisierung als Eigenwertproblem. Ann. d. Phys., 80 (1926), 437-490.
- [14] *Jouguet, M.*: Les Effets de la Courbure sur la Propagation des Ondes Electromagnétiques dans les Guides a Section Circulaire. Câbles et Transmission (Paris), 1 (1947), 133-153.
- [15] *Lewin, L.*: A Decoupled Formulation of the Vector Wave Equation in Orthogonal Curvilinear Coordinates, with Application to Ferrite-Filled and Curved Waveguides of General Cross Section. IEEE-MTT, 20 (1972), 338-342.
- [16] *Brambilla, M.; Finzi, U.*: Electro-Magnetic Eigenmodes of the Toroidal Cavity. IEEE-PS, 2 (1974), 112-114.
- [17] *Cap, F.*: Some Remarks on Toroidal Problems. Beitr. Plasmaphysik, 18 (1978), 207-217.
- [18] *Lileg, J.; Schnizer, B.; Keil, R.*: Perturbation Theoretic Computation of Toroidally Uniform Modes within an Empty Torus. AEÜ, 37 (1983), 359-365.
- [19] *Schupfer, N.*: Axialsymmetrische elektromagnetische Eigenschwingungen von plasmagefüllten toroidalen Resonatoren. Dissertation, Leopold-Franzens-Universität Innsbruck (1985).
- [20] *Weston, V.H.*: Toroidal Wave Functions. Quart. of App. Math., 16, (1958), 237-257.
- [21] *Birkhoff, G.; Mac Lane, S.*: A Survey of Modern Algebra. The MacMillan Company, New York (1953).
- [22] *Kark, K.W.*: Lösungen des elektromagnetischen Randwertproblems bei schwach inhomogenen Hohlleitern. Kleinheubacher Berichte, 29 (1985), 225-233.
- [23] *Kark, K.W.*: Störungstheoretische Berechnung elektromagnetischer Eigenwellen im torusförmigen Hohlleiter. Kleinheubacher Berichte, 30 (1986), 449-464.

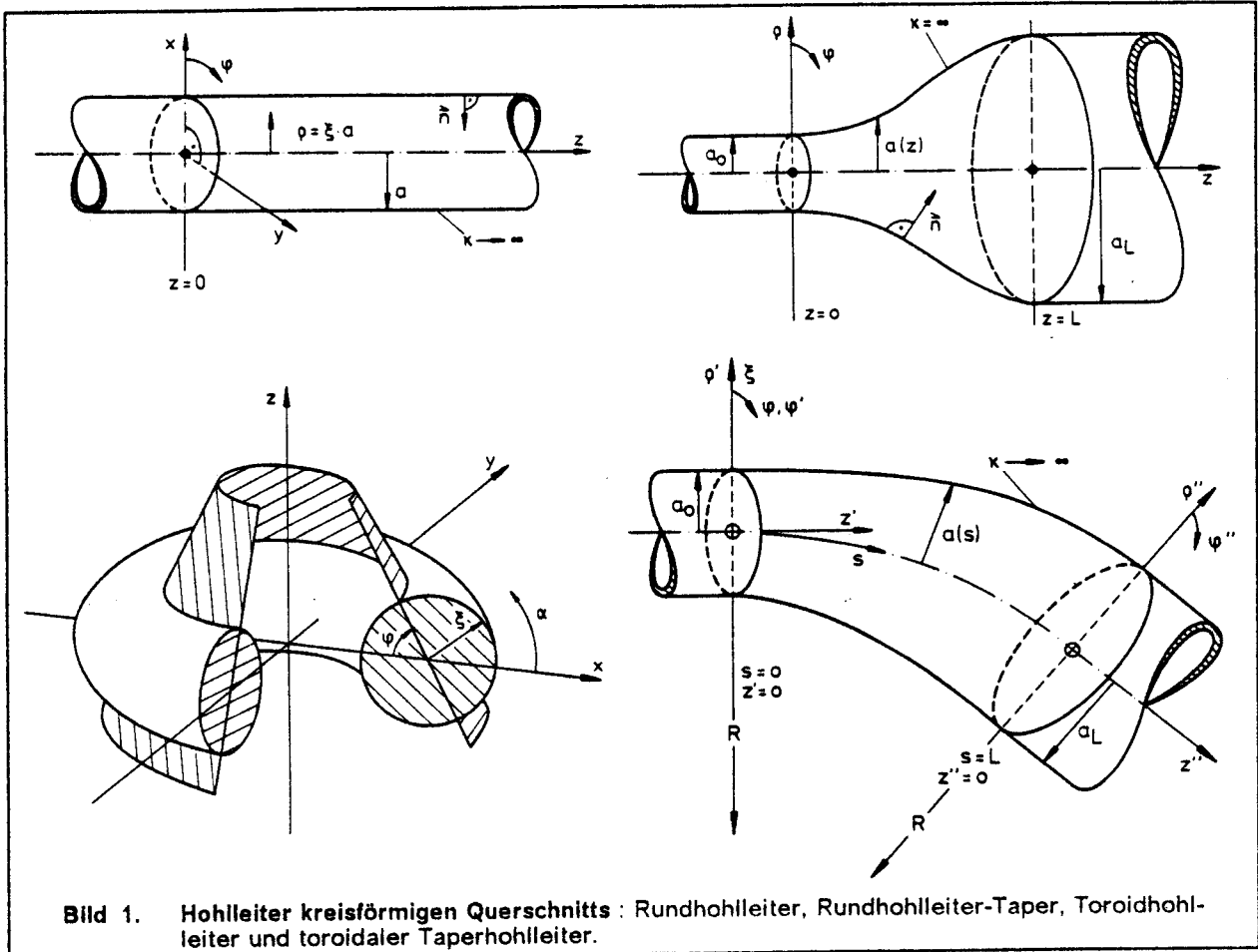


Bild 1. Hohlleiter kreisförmigen Querschnitts: Rundhohlleiter, Rundhohlleiter-Taper, Toroidhohlleiter und toroidaler Taperhohlleiter.

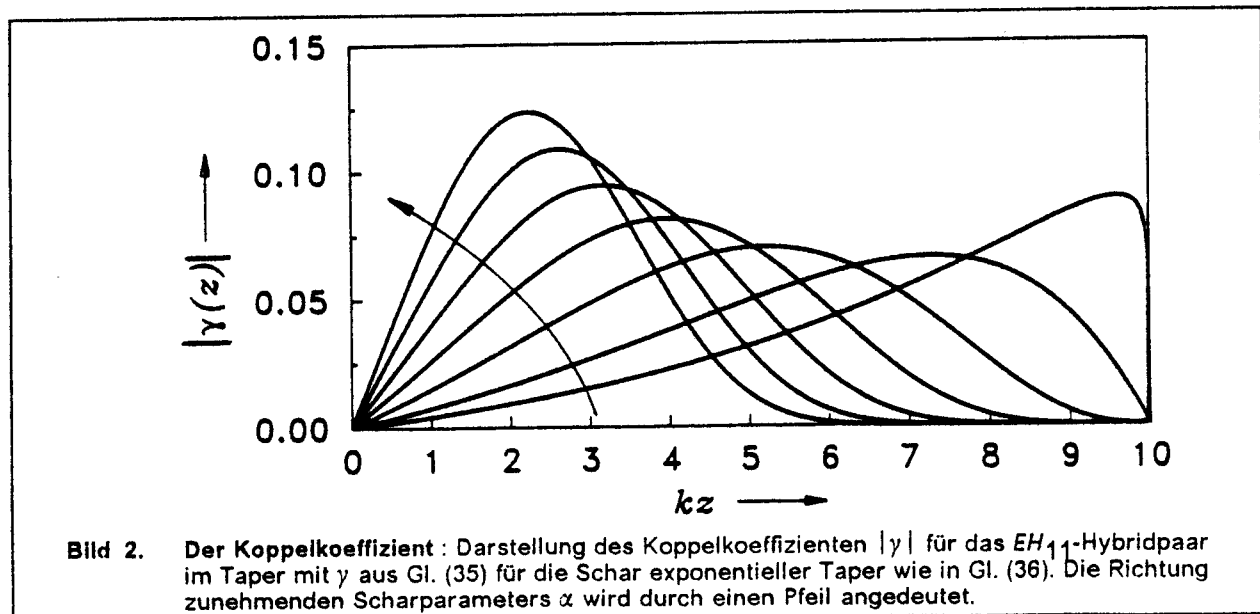
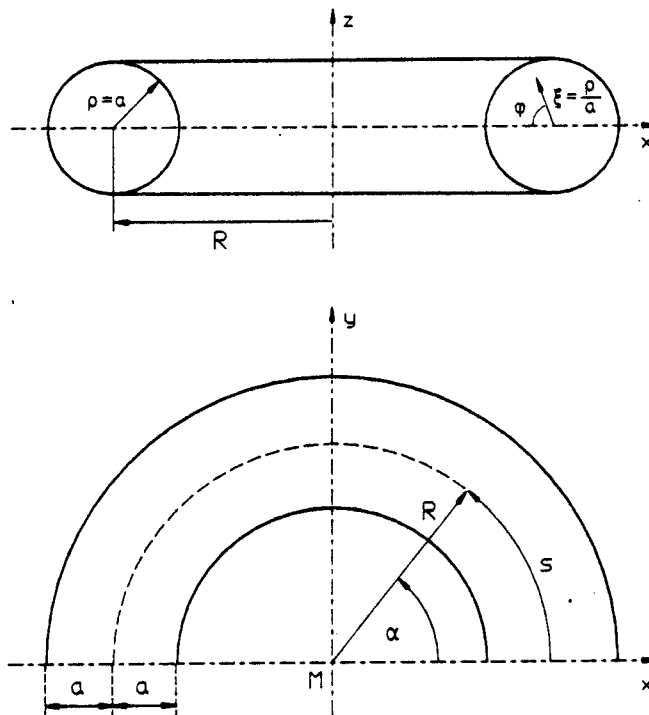
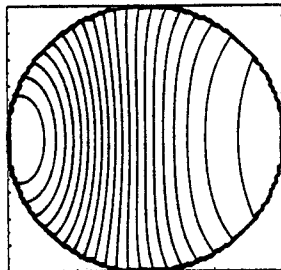
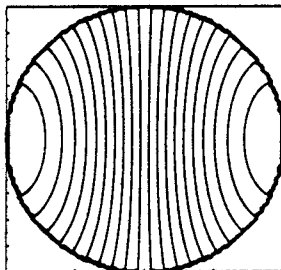


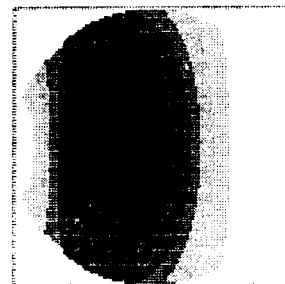
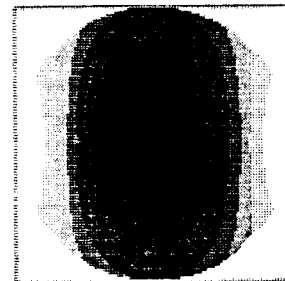
Bild 2. Der Koppelkoeffizient: Darstellung des Koppelkoeffizienten  $|\gamma|$  für das  $EH_{11}$ -Hybridpaar im Taper mit  $\gamma$  aus Gl. (35) für die Schar exponentieller Taper wie in Gl. (36). Die Richtung zunehmenden Scharparameters  $\alpha$  wird durch einen Pfeil angedeutet.



**Bild 3.** Torus mit Koordinatensystemen : Kartesische Koordinaten  $(x, y, z)$  und lokale Toruskordinaten  $(\xi, \varphi, \alpha)$  bzw.  $(\rho, \varphi, s)$  als verallgemeinerte Kreiszyylinderkoordinaten.



**Bild 4.** Transversale elektrische Feldlinien für die  $H_{11}$ -Welle im geraden Kreiszyylinder ( $\delta = 0$ ) und ihr gestörtes Verhalten im Toroidhohlleiter ( $\delta = 0.02$ ).



**Bild 5.** Die Energiestromdichte : Transversale Verteilung der longitudinalen Komponente  $P_{\alpha}$  des Poyntingvektors (siehe Gl. (53)) für die  $H_{11}$ -Welle im geraden Kreiszyylinder ( $\delta = 0$ ) und ihr gestörtes Verhalten im Toroidhohlleiter ( $\delta = 0.02$ ).